

Vysoká škola ekonomická v Praze

Fakulta financí a účetnictví

Katedra měnové teorie a politiky



**Operacionalizace konstrukce diskontních faktorů v modelu
oceňování dlouhodobých aktiv v prostředí České republiky**

DISERTAČNÍ PRÁCE

Autor disertační práce:	Ing. Michal Dvořák
Vedoucí diplomové práce:	doc. Ing. Karel Brůna, Ph.D.
Studijní obor:	Finance
Rok obhajoby:	2018

Čestné prohlášení

Prohlašuji, že disertační práci na téma „Operacionalizace konstrukce diskontních faktorů v modelu oceňování dlouhodobých aktiv v prostředí České republiky“ a články v ní využitě vypracoval samostatně a veškerou použitou literaturu a další prameny jsem řádně označil a uvedl v přiloženém seznamu.

V Praze dne 31. července 2018

Michal Dvořák

Děkuji

docentu Karlu Brůnovi za podporu a trpělivost při vedení této práce a za řadu cenných poznámek a připomínek, které učinily tento text výrazně kvalitnějším.

Tuto práci věnuji těm, kterým jsem se nevěnoval v okamžicích, kdy jsem se věnoval této práci.

Český abstrakt

Disertační práce sestává ze čtyř článků, které pojednávají o diskontní míře pro oceňování dlouhodobých aktiv v České republice. První tři z nich se zaměřují na oblast bezrizikové výnosové míry a jsou proto relevantní pro oceňování všech aktiv, která přináší v budoucnu peněžní toky v korunách. Čtvrtý článek nabízí způsob, jak odvodit průměrné realizované zhodnocení za dlouhý časový interval, což je nezbytné pro kalkulaci prémie za riziko akciového trhu, pokud se používá historická výnosnost v modelech typu CAPM. Úvodní kapitola tyto články shrnuje a zasazuje do širšího kontextu. Závěrečná kapitola naznačuje přínosy práce pro oceňovací teorii a praxi.

První článek ukazuje, že úrokové swapy v CZK jsou preferovaným podkladovým instrumentem pro konstrukci bezrizikových výnosových křivek. V jejich případě je k dispozici celé spektrum splatností od 1 do 20 let a jejich likvidita byla posouzena jako dobrá. Tyto závěry jsou v souladu s praxí finančního trhu i závěry EIOPA.

Druhý článek ukazuje, že Svenssonova metoda konstrukce výnosových křivek je pro český trh v zásadě vhodná, protože prokládá pozorovaná data s dostatečnou přesností. Koncepčně se ale nejedná o maximálně tržní ocenění, protože předpoklad o základním tvaru křivek, jejichž konkrétní parametry se následně odhadují na tržních datech, je poměrně arbitrární.

Třetí článek argumentuje, že nejčistší „základní“ řešení v případě, že je potřeba minimalizovat expertní zásahy, je metoda Famy a Blisse (1987), která předpokládá, že forwardová křivka je mezi každými dvěma pozorovanými splatnostmi plochá. Jedná se o nejjednodušší předpoklad a při absenci dalších informací nejhůře zpochybnitelný. V případě, že existují známé problémy s daty o konkrétních dluhopisech/swapech, je možné použít sofistikovanější přístupy k eliminaci jejich nepříznivého vlivu – například je vyloučit ze vzorku úplně nebo snížit jejich váhu – než tento vliv eliminovat regresním proložením Svenssonovou nebo jinou funkcí.

Čtvrtý článek diskutuje, zda je vhodnější volit aritmetický nebo geometrický průměr realizovaných výnosností. Klíčovým aspektem je investiční horizont u oceňovaného aktiva, který lze ztotožnit s průměrnou splatností jeho peněžních toků. Pro průměrnou splatnost kolem 10 – 15 let, která odpovídá průměrné duraci majetkových aktiv, je geometrický průměr výrazně vhodnější. Existuje ale varianta průměru, která bere investiční horizont plně v úvahu, a je tedy tou nejsprávnější variantou.

English abstract

The dissertation consists of four papers that deal with the discount rate for valuation of long-term assets in the Czech Republic. The first three focus on the risk-free rate and are thus relevant for all assets that bring future cash flows in CZK. The fourth paper offers a way to derive average yield realized over a long period of time, which is necessary for the calculation of the historical equity premium in CAPM-type models. The introductory chapter summarises the papers and puts them into a wider context. The final chapter highlights the benefits of the dissertation for valuation theory and practice.

The first paper demonstrates interest rate swaps in CZK are the preferred underlying instrument for risk-free curve construction. There is a range of maturities spanning from 1 to 20 years exhibiting solid liquidity. These findings are in line with the financial market practice and findings by EIOPA.

The second paper shows that Svensson method for yield curve construction is suitable for the Czech market in principle, because it interpolates the observed data with satisfactory precision. Conceptually, however, it is not a fully in accord with market-based valuation, because of the rather arbitrary underlying assumption of the curve shape, whose parameters are subsequently estimated from market data.

The third paper argues that the cleanest solution for the case when the expert discretions are to be minimized is the Fama-Bliss (1987) method which assumes the forward curve is constant between every two observed maturities. It is the easiest assumption and thus it is, in the absence of additional information, the hardest to question. If additional information on particular bond/swap data issues is available, sophisticated methods could be employed – for example excluding them from the sample or reducing their weight in the calculation – rather than eliminating their malicious influence by smoothing the data by Svensson or other functions.

The fourth paper discusses whether it is more appropriate to use arithmetic or geometric average for calculating realized return. The key element is the investment horizon for the appraised asset, which can be associated with the average time to its cashflows. For average times of 10 – 15 years which corresponds to the average duration of equities, geometric average is clearly superior. There is, however, an averaging method that takes the investment horizon fully into consideration and is therefore the most appropriate option.

Obsah

Český abstrakt.....	4
English abstract	5
Obsah	6
Kapitola 1 Úvod: Oceňování dlouhodobých aktiv v prostředí České republiky.....	8
1.1 Specifika oceňování dlouhodobých aktiv.....	12
1.2 Tržní ocenění	14
1.3 Oceňování pomocí diskontování peněžních toků.....	15
1.4 Bezriziková míra v českém prostředí: podkladový instrument	18
1.5 Bezriziková míra v českém prostředí: způsob výpočtu	21
1.6 Riziková prémie v oceňování aktiv: případ akciových investic a oceňování podniků	22
Literatura.....	25
Kapitola 2 Užití swapových sazeb pro stanovení diskontní míry se zřetelem na Českou republiku	29
Abstrakt.....	29
2.1 Úvod.....	29
2.2 Podmínky kladené na bezrizikovou míru	30
2.3 Způsob výpočtu.....	47
2.4 Závěr.....	49
Literatura.....	50
Kapitola 3 Bezriziková míra ze státních dluhopisů: přednosti a úskalí Svenssonovy metody	52
Abstrakt.....	52
3.1 Úvod.....	52
3.2 Dvojití použití Svenssonovy funkce	53
3.3 Přejímání německých dat	62
3.4 Podmínky kladené na datovou základnu	66
3.5 Kvalita proložení u českých dat	68
3.6 Závěr.....	74
Literatura.....	75
Kapitola 4 Bezrizikové sazby ze státních dluhopisů: metoda Fama-Bliss.....	78
Abstrakt.....	78
4.1 Úvod.....	78
4.2 Problémy při stanovování bezrizikových měř pro oceňovací účely.....	79
4.3 Konstrukce výnosové křivky metodou Fama-Bliss.....	81
4.4 Numerický příklad pro Českou republiku	83
4.5 Charakterizace metody Fama-Bliss ve srovnání s alternativami.....	87

4.6	Závěr.....	91
	Literatura.....	92
Kapitola 5 Measuring Yields: Arithmetic, Geometric, and Horizon-Consistent Average... 94		
	Abstrakt.....	94
5.1	Introduction	94
5.2	How much do the averages differ?	95
5.3	The setup.....	95
5.4	A generally inconsistent arithmetic-average procedure	99
5.5	A consistent forecasting procedure.....	101
5.6	Biases in arithmetic and geometric averages.....	104
5.7	A numerical illustration	107
5.8	Application to SP500	110
5.9	Conclusion.....	112
	Literatura.....	113
Kapitola 6 Závěr: přínos pro oceňovací praxi a teorii..... 114		
	Literatura.....	119

Poznámka

Desertační práce je souborem 4 článků autora publikovaných v rámci doktorského studia. Plný text každého z těchto 4 článků je v kapitole označené číslem níže. Pro účely dizertační práce bylo sjednoceno formátování článků a opraveny některé překlepy. S obsahem článků se nijak nemanipulovalo.

- [2] DVOŘÁK, M. (2014a). Užití swapových sazeb pro stanovení diskontní míry se zřetelem na Českou republiku. *Oceňování : čtvrtletník*. 2014. sv. 7, č. 1, s. 3--27. ISSN 1803-0785.
- [3] DVOŘÁK, M. (2014). Bezriziková míra ze státních dluhopisů: přednosti a úskalí Svenssonovy metody. *Oceňování : čtvrtletník*. 2014. sv. 7, č. 3, s. 3-28. ISSN 1803-0785.
- [4] DVOŘÁK, M. (2016a). Bezrizikové sazby ze státních dluhopisů: metoda Fama-Bliss. *Oceňování : čtvrtletník*. 2016. sv. 9, č. 3, s. 55-71. ISSN 1803-0785
- [5] DVOŘÁK, M. (2016). Measuring Yields: Arithmetic, Geometric, and Horizon-Consistent Average. *Prague economic papers : quarterly journal of economic theory and policy*. 2016. sv. 25, č. 3, s. 335--353. ISSN 1210-0455.

Kapitola 1 obsahuje úvod, který tyto články shrnuje a zasazuje do širšího kontextu. Kapitola 6 obsahuje závěr, který obsahuje shrnutí přínosů článků pro oceňovací teorii a praxi. Tyto dvě části nebyly dosud publikovány.

Kapitola 1

Úvod: Oceňování dlouhodobých aktiv v prostředí České republiky

Správné oceňování aktiv (příp. pasiv¹) hraje nezastupitelnou úlohu při ekonomickém rozhodování subjektů. Subjekty nemohou provádět ekonomicky správná rozhodnutí, pokud nedisponují kvalitními informacemi o relacích mezi cenami aktiv. Na ocenění jsou dále navázány další ekonomické kalkulace jako měření výkonnosti aktiv nebo řízení rizik. To platí jako pro ocenění pro potřeby ekonomických subjektů samotných, tak pro ocenění pro potřeby subjektů jiných (účetní nebo regulatorní výkaznictví).

Nejrozšířenějším způsobem oceňování dlouhodobých aktiv je ocenění penězi vyjádřitelného prospěchu, které aktivum přináší. Aktivum je něco, co svému majiteli přináší prospěch – aktiva, která přináší vyšší prospěch, jsou atraktivnější a subjekty jsou za ně ochotni zaplatit vyšší cenu. Jako „prospěch“ se běžně považují peněžní toky – akciové dividendy, kupóny dluhopisů, nájemné z nemovitostí apod., nicméně stejně je možné pracovat i s penězi ocenitelným majetkovým prospěchem (například majetková dividenda), nebo penězi ocenitelným nemajetkovým prospěchem. Ocenění peněžními toky lze vnímat jako specifickou formu srovnání s porovnatelnými aktivy, kdy oceňovaným i porovnávaným aktivem jsou peníze. Odlišnými charakteristikami oceňovaného a porovnávaného aktiva, které je nutno adresovat, je odlišný horizont nastání a rizikovost těchto „peněz“. K tomu slouží diskontní míra, která převádí tyto peněžní toky na současnou hodnotu a tím stanovuje jejich cenu. Diskontní míra by měla obsahovat jak element splatnosti, tak element rizika.

Při volbě diskontní míry je nutné brát v úvahu specifika *jednotlivých trhů*. Zatímco ve státech s rozvinutým finančním systémem je k dispozici dostatek vhodných likvidních nástrojů i delších splatností, v případě ČR to nemusí platit. Proto je vhodné se zaměřit výhradně na český trh. Konstrukcí bezrizikových výnosových křivek v českém prostředí se zabývaly články Slavík (2001), Kladívko (2010) a Hladíková a Radová (2012). Tyto články se však soustřeďují na metodu Nelson a Siegel (1987) nebo Svensson (1994), které jsou vhodné pro extrakci základních informací o tvaru výnosové křivky, ale nemusí se nutně hodit pro účely oceňování.

V této dizertační práci posuzované techniky konstrukce bezrizikové výnosové křivky – jak Svensson (1994), tak Fama-Bliss (1987), patří k těm jednodušším. S aplikací složitějších metod korigujících výnosové křivky podle likvidity jejich jednotlivých segmentů (např. Waggoner (1997) nebo vážením dat o jednotlivých dluhopisech jejich „důvěryhodností“) se autor v prostředí českého trhu nesetkal jak v akademickém, tak praktickém prostředí. Důvodem je, že vazba mezi objemem realizovaných obchodů a „důvěryhodností“ tržních cen je velmi slabá. V prostředí českého trhu se praktici finančních často uchylují k arbitrárním korekcím výnosové křivky, které vyplývají z jejich expertní znalosti prostředí. Takové korekce jsou spíše uměním nežli vědou. V této dizertační práci se proto složitějším postupům nevěnujeme a setrváváme u jednodušších a přezkoumatelných postupů.

¹ Co je pro investora aktivum, je pro emitenta pasivum. Pokud se přidržíme požadavku „tržnosti“ při ocenění (viz dále), můžeme tvrdit, že tržní cena aktiv je shodná s tržní cenou pasiva. Dále tak můžeme mluvit o oceňování *aktiv*, oceňování pasiv je jen zrcadlovým obrazem.

Vedle toho je nutné brát v úvahu rovněž specifika *oceňovaných aktiv*. Tato práce zaměřuje na diskontní míru pro oblast oceňování dlouhodobých aktiv, jako jsou podniky nebo nemovitosti. Česká oceňovací praxe v těchto oblastech používá velmi jednoduché přístupy. Etalonem – který v řadě aspektů ovšem přesahuje na českém trhu nejrozšířenější praxi – jsou práce Mařík et al (2011 a 2011a)². K tomuto etalonu tato disertační práce často odkazuje.

Cílem disertační práce je přispět ke zkvalitnění české oceňovací praxe v oblasti diskontních měr pro oceňování dlouhodobých aktiv. Disertační práce identifikuje několik oblastí, ve kterých navrhuje zdokonalení oceňovacích postupů. Těmito oblastmi jsou volba nástroje finančního trhu pro odvození bezrizikové výnosnosti, způsob konstrukce výnosových křivek pro oceňovací účely a způsob výpočtu průměru realizované výnosnosti pro odvození rizikové prémie za nesení akciového rizika.

Práce odpovídá na 4 konkrétní otázky.

Otázka 1. Je lepší volit korunové úrokové swapy nebo výnosy korunových státních dluhopisů pro odvození bezrizikové výnosové míry?

Otázka 2. (Zejména v případě, že jsou zvoleny korunové státní dluhopisy,) je vhodná Svenssonova metoda konstrukce výnosové křivky, kterou používá řada centrálních bank a německé oceňovací standardy, i pro český trh?

Otázka 3. (Zejména v případě, že jsou zvoleny korunové státní dluhopisy,) jaká metoda konstrukce výnosové křivky by měla být tou „základní“, je-li cílem tržní ocenění s minimalizací subjektivních zásahů analytika?

Otázka 4. Je vhodnější použít *geometrický* nebo *aritmetický* průměr realizovaných výnosů při výpočtu průměrné realizované výnosnosti?

Cíli disertační práce je přizpůsobena její struktura. Každá otázka je zodpovězena prostřednictvím jednoho článku. Tyto články jsou předmětem kapitol 2 až 5.

Z metodického hlediska je při odpovídání na tyto otázky často využíván přístup, kdy jsou v prvním kroku definována normativní kritéria a následně je posuzovaná metoda nebo zdroj dat popsána a zhodnocena z hlediska míry splnění normativních kritérií. Je pracováno s reálnými daty z českého prostředí, neboť data z jiných zemí nemusí být pro ČR relevantní. Vzhledem k tomu, že cílem disertace je zdokonalit oceňovací praxi, je patrná snaha o maximální názornost, včetně užívání příkladů. Cíli zdokonalení oceňovací praxe by mělo napomoci i to, že články z kapitol 2-4 byly publikovány v oborově úzce zaměřeném časopise *Oceňování*.

Konkrétní metodologický postup užitý při zodpovězení výše uvedených otázek je následující.

Otázka 1. *Je lepší volit korunové úrokové swapy nebo výnosy korunových státních dluhopisů pro odvození bezrizikové výnosové míry?*

Aby bylo možné vhodnost užívání swapů posoudit, je stanoveno 5 požadavků, na korektní způsob stanovení bezrizikové výnosové míry: (1) tržní konformita,

² Další významnou publikací popisující oceňování podniků v českém prostředí byla Kislingerová (2001). Vzhledem k vývoji na finančních trzích i v metodách oceňování od vydání této publikace – její aktualizovanější verze nejsou – ji však nelze považovat za etalon pro období, ve kterém je tato disertační práce psána. Kislingerová (2001) se bezrizikové míře a průměrovací metodě věnuje pouze okrajově. Za bezrizikovou míru považuje výnos do splatnosti dlouhodobého korunového českého státního dluhopisu. V otázce volby průměru nedochází k jednoznačnému závěru a omezuje se na konstatování, že oba průměry vedou k odlišnému výsledku.

(2) bezrizikovost, (3) dostatečný počet splatností a (4) dostatečná likvidita kontraktů a (5) slučitelnost s ostatními prvky diskontní míry. Aby bylo možné swapy prohlásit za vhodné, musí být splněny všechny uvedené podmínky.

Podmínky (1) a (5) jsou diskutovány kvalitativně s ohledem na charakter swapů a konstrukci diskontní míry. V rámci testování podmínky (2) je diskutována charakteristika swapového kontraktu a srovnána variabilita sazeb úrokových swapů na USD v čase s realizovanou variabilitou výnosů amerických T-Bills, které se považují za bezrizikové aktivum par excellence. Podmínka (4) je měřena porovnáním distribucí bid-ask spreadů jednotlivých splatností korunových IRS, mezidenních změn bid-ask spreadů a mezidenních změn průměru kotací (tj. kotací mid). Podobný přístup používá pro měření likviditu trhu EIOPA (2016).

Denní data o swapových sazbách v letech 2004-2013 jsou použita ze systému Thomson Reuters. K datu publikace článku v lednu 2014 nebyly k dispozici velmi podrobné (ale též velmi chybové) registry obchodních údajů o derivátech podle regulace EMIR, které by byly schopny poskytnout přesnější informaci o objemech proběhlých obchodů. Tento zdroj je poprvé využit v empirickém článku ABAD et al. (2016).

Otázka 2. *(Zejména v případě, že jsou zvoleny korunové státní dluhopisy,) je vhodná Svenssonova metoda konstrukce výnosové křivky, kterou používá řada centrálních bank a německé oceňovací standardy, i pro český trh?*

Posouzení vhodnosti je provedeno sérií dílčích kroků. V prvním kroku je testováno, zda metoda je tržně konzistentní, tj. povede vždy k přesnému proložení tržních dat. Jinými slovy, zda zkonstruovaná výnosová křivka má tu vlastnost, že pokud jí oddiskontujeme peněžní toky z každého dluhopisu, dostaneme jeho aktuální tržní cenu.

Vzhledem k tomu, že podmínka tržní konzistence nebude splněna, testujeme přesnost proložení jednotlivých splatností výnosové křivky. Kromě obecné nepřesnosti testujeme, zda některé splatnosti jsou systematicky prokládány hůře než ostatní.

Zvláště důležitý je dlouhý konec výnosové křivky. Parametr β_0 ve Svenssonově funkci reprezentuje dlouhodobou výnosovou míru (limitně pro nekonečnou splatnost, Svensson 1994). Odhad Svenssonovy funkce tak představuje možnost, jak zkonstruovat bezrizikovou křivku i pro horizonty přesahující splatnost nejdelšího dluhopisu ve vzorku. Budeme testovat, zda je tento přístup vhodný, tím, že budeme posuzovat ekonomickou smysluplnost hodnot tohoto parametru a jeho stabilitu v čase.

Posledně testujeme rozdíl mezi Svenssonovou funkcí odhadnutou na českých a německých datech, aby bylo prokázáno, že užívání německých dat pro český trh vede k výrazně odlišným hodnotám. Tím reagujeme na Maříková a Mařík (2012), které mohou být interpretovány tak, že lze přejímat výsledky z německého trhu.

Vzhledem k tomu, že neexistuje nic jako „správná křivka“, se kterou by šlo Svenssonovou funkcí proloženou křivku porovnávat, je za správnou křivku považována křivka odvozená z úrokových swapů v jednotlivých dnech v letech 2004-2014. Tím je zajištěno, že tvary křivek budou realistické. Svenssonova funkce je odhadnuta s pomocí metody nelineárních nejmenších čtverců minimalizující odchylky výnosů (jak doporučuje Schich 1997) a algoritmus je naprogramován v programu MATLAB.

Otázka 3. (Zejména v případě, že jsou zvoleny korunové státní dluhopisy,) jaká metoda konstrukce výnosové křivky by měla být tou „základní“, je-li cílem tržní ocenění s minimalizací subjektivních zásahů analytika?

Analýzou všech běžně používaných přístupů pro konstrukci výnosových křivek je posouzena míra diskrece, kterou uživatel nad konstrukcí křivky má.

Metoda je prakticky demonstrována na příkladu používající data o cenách českých státních dluhopisů k příslušnému dni.

Jsou důkladně dokumentovány její koncepční výhody a nevýhody.

Omezením použitých analytických metod je nemožnost provést kvantitativní zhodnocení. Neexistuje totiž nic jako „správná“ výnosová křivka, vůči které by bylo možné jednotlivé přístupy porovnat. Řešením je užití teoretické křivky jako v Jeffrey et al. (2006). Kritikou tohoto přístupu je, že závěr je poplatný užitému předpokladu o teoretické křivce.

Otázka 4. Při výpočtu průměrné realizované výnosnosti, je vhodnější použít geometrický nebo aritmetický průměr realizovaných výnosů?

Výchozím bodem analýzy je definice konzistentního průměru. Řekneme, že průměr je *konzistentní*, pokud investor při složeném úročení tímto průměrem dosáhne za N jednoletých období (tzv. horizont) stejné míry zhodnocení, které by v průměru dosahoval ve všech myslitelných N -letých obdobích nakombinovaných z realizovaných 1letých výnosností. V práci se pracuje s jednoletými realizovanými výnosy, ale obecně lze pracovat i s odlišnými frekvencemi.

Předpokládá se nulová autokorelace ve výnosech, neboť tento předpoklad usnadní výklad a je v souladu s daty o ročních výnosech akciového trhu v USA, odkud se data o dlouhodobé výnosnosti akciového trhu často berou (Damodaran 2013a). Nepřítomnost autokorelace je testována pomocí Ljungovy a Boxovy testové statistiky. Metodu lze adaptovat i na případ s autokorelací výnosů, byť to není součástí článku. Rovněž se předpokládá, že průměrovaná data se mezi sebou liší, jinak by jim každý průměr musel být roven.

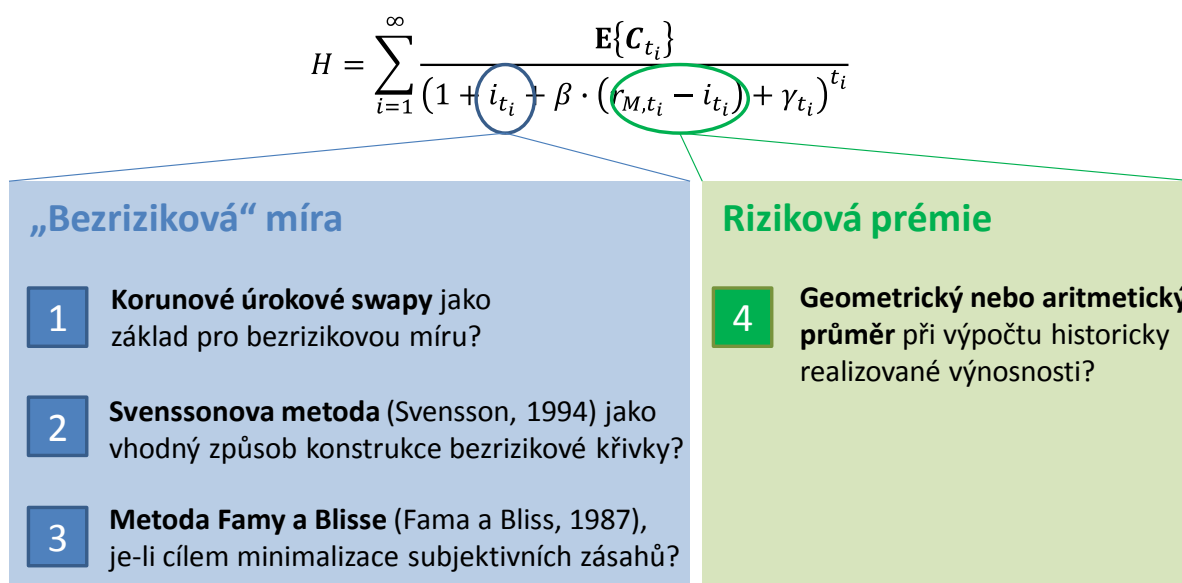
Nejprve je pomocí matematicko-statistické teorie (zejm. Jensenova nerovnost) dokazováno, zda je aritmetický a geometrický průměr obecně konzistentní.

Poté je charakterizován postup pro obecně konzistentní průměr (pro libovolný horizont) a je odvozen stručný vzorec pro tento průměr.

V aplikační části je srovnáním aritmetického, geometrického a jejich vážené kombinace (Blume 1974, Indro a Lee 1997) zhodnoceno, který průměr je nejvhodnější pro horizonty 1-85 let na datech pro index SP500.

Že se všechny otázky váží k jednomu tématu, ukazuje na příkladu oceňovacího vzorce pro oceňování podniků Obr. 1.1.

Obr. 1.1 Vzorec pro oceňování podniků a zaměření článků v této disertaci



Zdroj: Autor.

Poznámka: C_{t_i} představuje náhodnou veličinu popisující peněžní tok nastávající za t_i let od okamžiku ocenění, $E\{C_{t_i}\}$ pak jeho střední hodnotu. i_{t_i} představuje bezrizikovou míru a r_{M,t_i} představuje výnosnost kapitálového trhu jako celku. Faktor β odráží relativní citlivost odvětví posuzovaného podniku vzhledem ke kapitálovému trhu jako celku. γ_{t_i} představuje další prémie za riziko oceňovaného aktiva, které nelze popsat faktorem β . Blíže viz kapitoly 1.3 a 1.6.

Zbývající část kapitoly 1 nabízí širší vhled do problematiky. Jejím cílem je zasadit zbylé kapitoly do ekonomického a historického kontextu a poskytnout čtenáři, který může být odborníkem na jinou část finanční ekonomie, důvody, které autora vedly k upřednostnění některých východisek před jinými. V kapitole 1.1 jsou zmíněna specifika dlouhodobých aktiv, která mají vliv na způsoby jejich oceňování. Kapitola 1.2 zdůrazňuje specifika tržního oceňování, protože kapitoly 2-3 a zejména 4 jsou relevantní pouze pro oceňování tržní nebo takové, kde je nutná přezkoumatelnost výpočtu. Kapitola 1.3 přináší 3 způsoby implementace metody diskontování peněžních toků, aby bylo ukázáno, že znalost bezrizikové výnosnosti, o které pojednávají kapitoly 2-4, je potřebná ve všech z nich. Kapitola 1.4 popisuje současný stav poznání v oblasti volby bezrizikového instrumentu pro bezrizikovou výnosnost. Kapitola 1.5 popisuje současný stav poznání v oblasti způsobu výpočtu bezrizikové výnosnosti. Kapitola 1.6 se zaměřuje na způsoby stanovování prémie za nesení akciového rizika, aby zasadila průměrování realizovaných výnosností do kontextu diskontních měr.

1.1 Specifika oceňování dlouhodobých aktiv

Postup oceňování peněžními toky obecný a lze jej vztáhnout víceméně ke všem třídám aktiv, která peněžní toky přinášejí. Při praktické implementaci je však oceňovací postupy nutno přizpůsobit specifikům oceňovaných aktiv.

Jedním důležitým specifikem je trvání aktiva a z toho vyplývající perioda, po kterou bude aktivum peněžní toky přinášet. Nejistota ohledně velikosti a pravděpodobnosti nastání peněžních toků se odráží v tom, že dlouhodobá aktiva lze ocenit obtížněji, resp. pouze s vyšší mírou nejistoty.

Druhým důležitým specifikem je likvidita aktiva. To znamená rozvinutost trhu, na kterém transakce s aktivem probíhají. Obecně menší počet transakcí na trhu vede k vyššímu kolísání cen. Pro řadu aktiv trh v podstatě neexistuje. Nízká likvidita nebo absence trhu komplikuje nákup nebo prodej aktiv a zvyšuje transakční náklady, ale komplikuje i oceňování. Informace o realizovaných cenách na málo likvidním trhu mohou být poplatné nahodilým faktorům, zastaralé nebo nedostupné. Obecně platí, že trh s dlouhodobými aktivy bývá méně likvidní než trh s krátkodobými aktivy.

Na jedné straně spektra likvidity jsou nástroje peněžního trhu a krátkodobé státní dluhopisy. Na druhé straně jsou nekótovaná dlouhodobá aktiva, jako třeba nemovitosti, účasti v podnicích, aktiva vyplývající z dlouhodobých pojistných smluv (např. životní pojištění) nebo dlouhodobé úvěry.

Nelikvidní dlouhodobé typy aktiv přitom představují nezanedbatelnou část domácích finančních aktiv (Obr. 1.2). Zejména v případě podniků lze ukázat, že nekótované podniky (součet položek „nekótované akcie“ a „jiné účasti ve firmách“) svou kapitalizací výrazně dominují nad podniky kótovanými („kótované akcie“). Problematice oceňování nelikvidních dlouhodobých aktiv proto stojí za to věnovat náležitou pozornost.

Obr. 1.2 Aktiva emitovaná tuzemskými subjekty v ČR
(v bilionech Kč k prosinci 2017)



Zdroj: ČNB, Statistika finančních účtů

Poznámka: Ostatní pohledávky zahrnují mimo jiné obchodní úvěry.

Z hlediska použitých metod lze konstatovat, že diskontní míra používaná pro likvidní krátkodobá aktiva (např. finanční deriváty) bývá kalkulována pomocí velmi sofistikovaných metod. Naproti tomu k oceňování dlouhodobých nelikvidních aktiv jsou obvykle používány přístupy jednodušší. To může být dáno tím, že velká část oceňovacího úsilí je koncentrována do prognózování peněžních toků, které má na cenu aktiva relativně vyšší vliv. Na druhou stranu v některých případech jsou pro diskontní míru používány metody vyloženě zjednodušující a potenciálně hrubě nepřesné. Jedním takovým případem je používání historických průměrů realizované výnosnosti státních dluhopisů, které kritizuje např. Maříková a Mařík (2011, kap. 10.2.1).

Kromě specifík typů aktiv je třeba brát v úvahu prostředí, ve kterém se nacházejí. V případě poměrování peněžních toků je klíčová měna, ve které jsou tyto peněžní toky denominovány. Je

nepochybné, že pro korunové peněžní toky je alternativní investice pouze jiné korunové aktivum. Jak ukazuje Damodaran (2010, s. 154), někteří analytici věnující se oceňování podniků tuto zásadu ignorují a dopad vzniklé chyby může být zásadní. Například oceňování korunových aktiv s pomocí výnosů státních dluhopisů USA je zjevně nekonzistentní, neboť kvůli dnešním rozdílům v měnověpolitických sazbách a podmínkám na finančním trhu by investoři do dolarových aktiv vyžadovali vyšší zhodnocení než v případě srovnatelných investic do aktiv korunových.

1.2 Tržní ocenění

Při oceňování je potřeba mít na paměti účel ocenění (např. Mařík et al. 2011a, kap. 1.4). V první řadě je třeba odlišovat oceňování *tržní*, kde cílem je přijít s nejlepším odhadem ceny, kterou by bylo možné očekávat ke dni ocenění na trhu, od oceňování subjektivního. *Subjektivním* oceněním je ocenění pro účely konkrétního investora, který může mít jiný rizikový apetit než trh nebo zastávat jiné představy o budoucím tržním vývoji. Za variantu subjektivního ocenění lze považovat rovněž ocenění pro specifické účely, např. pro účely zástavní hodnoty pro banky. A konečně posledním typem subjektivního ocenění může být odhad fundamentální hodnoty aktiva, např. pro identifikaci investičních příležitostí. Každý subjekt totiž má odlišnou představu o tom, co je cena opodstatněná příslušnými fundamenty.

Pro některá aktiva je ocenění na tržní hodnotu komplikované tím, že trh s daným aktivem neexistuje, nebo je neúplný či nelikvidní. Trhy v různých měnách jsou různě rozvinuté. Je známým faktem, že trhy v USA a západní Evropě jsou bohatší šíří nabízených instrumentů i jejich tržní likviditu než trhy v ČR³. To má 2 implikace. Pro některé české instrumenty, u jejichž západních protějšků existuje tržní cena, je třeba používat „nepřímé“ tržní ocenění přes peněžní toky. A dále, rozdíly v likviditě trhů, na jejichž základě se stanovuje diskontní faktor pro příslušnou měnu, mezi vyspělými a méně rozvinutými trhy mohou implikovat v rámci „nepřímého“ tržního ocenění potřebu použití jiných přístupů a jiných datových zdrojů. Proto má smysl zkoumat možnosti konstrukce diskontního faktoru specificky v prostředí České republiky. Proto se také kapitoly 2-4 věnují prostředí ČR a jejich závěry nejsou přímo zobecnitelné pro jiné země a měny.

V této dizertaci se zaměříme výhradně na ocenění tržní. V posledních 10 letech totiž panuje určitá shoda na tom, že v řadě oblastí je *teoreticky* nejlepší ocenění tržní.

Příklon k tržnímu oceňování lze demonstrovat dvěma příklady z regulatorního i oceňovacího prostředí. *Zprvé*, pojišťovny v rámci režimu Solvency II oceňují všechna svá aktiva tržně, a to včetně rozsáhlých dluhopisových portfolií, které zamýšlí držet do splatnosti. Rovněž oceňují tržně i své pojistné závazky, kdy očekávanou hodnotu pojistných plnění diskontují křivkou, která vychází z tržních kótací úrokových swapů v příslušné měně. Úvahami o zrušení dluhopisového portfolia bank drženého do splatnosti, které se může oceňovat naběhlou hodnotou, se zabýval i Basilejský výbor pro bankovní dohled (BCBS 2017, s. 35). *Zadruhé*, v praxi tržního oceňování podniků metodou diskontovaných peněžních toků se klade důraz na to, aby všechny použité vstupy byly skutečně co nejvíce „tržní“ (např. Mařík et al., 2011 nebo Damodaran, 2008). Damodaran (2010, s. 165) obecně tvrdí, že bezrizikové míry měly být brány z trhu (a nikoli být zatíženy úsudkem analytika), protože úsudkem analytika je už zatížen předpoklad o peněžních tocích a není jednoduché od sebe separovat oba subjektivní vlivy.

³ Pro kótované akcie na toto téma viz Dvořák (2015).

Tržní přístup vychází cen na trhu a reflektuje omezení daného trhu. Ocenění by mělo být v každém okamžiku reálné. Teoreticky by u něj neměla nastávat situace, že při případném prodeji by investor za aktivum získal méně peněz, než kolik udává ocenění. Na libovolně likvidním trhu ovšem existuje velikost objemu transakce, od které je realizovaná cena nepřímo úměrná prodávanému množství. U méně likvidních trhů je pak tato limitní velikost samozřejmě nižší. Tržní cena je proto do jisté míry fikcí, byť ekonomicky velmi užitečnou.

Pokud je využíváno oceňování jiné než tržní, může to mít neblahé následky pro vypovídací hodnotu výsledku. Hrozí totiž riziko, že subjekt nebude schopen aktivum prodat za odhadovanou částku, což ztěžuje jeho ekonomické kalkulace.

Aplikace tržního přístupu v oceňování aktiv přináší několik nezanedbatelných problémů. *Zaprvé*, kolísání tržních cen aktiv se projevuje kolísáním hodnoty kapitálu (a tedy i vnímané solventnosti) subjekt, který aktivum drží. A to i tehdy, když subjekt hodlá aktivum držet do splatnosti, čímž pro něj jeho tržní cena odrážející tržní sentiment není alespoň v krátkém období příliš relevantní. Podobný efekt by na emitenta mělo kolísání tržních cen jím vydaných dluhových instrumentů⁴. *Zadruhé*, oceňování na tržní hodnotu může být výrazně procyklické. V případě bublin na trhu bude tržní hodnota v příkrém nesouladu s hodnotou, kterou implikují fundamentální faktory.

V případě, že by kolísání tržních cen vedlo k neodůvodněnému dopadu na subjekty, jsou nezřídka aplikována zvláštní pravidla snižující dopad tohoto kolísání. Případně jsou subjekty nuceny na tyto případy vytvářet zvláštní rezervy nebo jsou v této situaci dohledové autority benevolentnější. V oblasti pojišťovnictví je příkladem prvního typu opatření tzv. Volatility Adjustment k bezrizikové míře v rámci Solvency II, který snižuje kolísání kapitálu pojišťoven. Příkladem druhého typu opatření je tzv. „extension of recovery period“ podle článku 138(4) Solvency II, které umožňuje za přesně specifikovaných podmínek pojišťovněm neplnit požadavky na kapitál až po cca 8 let (EIOPA 2015). Jedním ze situací, kdy by toto pravidlo mohlo být aplikováno, je dlouhotrvající prostředí nízkých výnosů. To je prostředí, ve kterém jsou bezrizikové míry mimořádně nízké a hodnota pojistných závazků tak „bublinově“ roste.

1.3 Oceňování pomocí diskontování peněžních toků

Oceňování aktiv podle jejich peněžních přínosů má dlouhou historii. Podle Kirzner (2006) existují prokazatelné zmínky o podobných přístupech už v 16. století; historie oceňování pro potřeby byznysu sahá až k Římanům.

Do 19. století patřily mezi nejčastější aktiva nemovitosti, které přinášely pravidelnou rentu. Podle Picketty (2013) bylo standardní kapitalizační mírou 5 %. Od 18. století bylo třeba oceňovat dluhohobé státní dluhopisy (včetně perpetuit) a renty pro účely aktuárských výpočtů.

V teorii se problematika oceňování systematicky objevuje až na přelomu 20. století. Podle Moore (2009) byl Alfred Marshall prvním ekonomem, který detailně zkoumal techniky pro určování hodnoty aktiv, i když jeho hlavní zájem ležel v procesu cenotvorby a fungování ekonomického systému. Jeho práce (Marshall 1893, 1920) poskytly východiska pro základní přístupy oceňování, které se používají dodnes – kapitalizace budoucích příjmů, tržní srovnání a náklady reprodukce. Marshallovy práce o kapitalizaci renty rozšířil Fisher (1906), podle kterého je

⁴ Oceňování *pasiv* tržními hodnotami bylo pod názvem *Debt Valuation Adjustment* v roce 2007 umožněno americkými účetními pravidly US GAAP. Od roku 2017 je však tato možnost účetními pravidly opět zrušena. Logika tržní hodnoty spočívá v tom, že pokud emitent může svůj dluh „levně“ skoupit na trhu, pak je dluh pro něj méně svazující, než kdyby jej musel řádně splácet.

hodnota kapitálu spojena s výší úrokové sazby, neboť hodnotu kapitálového aktiva udává čistá současná hodnota příjmů, které aktivum přináší. Fisherovo (1906) pojednání o riziku, diskontních mírách a procesu diskontování představuje plně vyvinutou formu „výnosové teorie hodnoty“ a silně ovlivnilo velkou část oceňovací literatury 20. století zabývající se současnou hodnotou budoucích příjmů (Moore 2009).

Za první prakticky orientovanou knihu o oceňování nemovitostí v USA lze považovat Hurd (1903). Jeho přístup pojednává pouze o kapitalizaci renty (Moore 2009), což ukazuje, že tento oceňovací přístup u dlouhodobých aktiv časově předchází ostatní oceňovací přístupy. V UK první prakticky orientovanou oceňovací příručku zaměřenou na nemovitosti je Webb (1909). Kompendium valuačních přístupů představuje Babcock (1932), který přišel se 7 oceňovacími postupy, přičemž jako výchozí přístup doporučuje metodu diskontování příjmů.

Starší přístupy k oceňování aktiv pracovaly s aktuální výší pravidelného příjmu. Tento přístup fungoval dobře v době s nízkou inflací. Pokud ovšem lze důvodně předpokládat, že velikost peněžních toků v čase poroste, tento přístup selhává. Pak je třeba zaměřit se na očekávané dividendy, které mohou být diametrálně odlišné od současných.

Williams (1938) byl jeden z prvních, kdo zjišťoval fundamentální hodnotu akcií pomocí modelu diskontovaných očekávaných dividend. Používal obecný vzorec pro diskontované peněžní toky a jejich různé varianty předpokládající trendový růst nebo pokles výše těchto toků. Na tuto myšlenku navázali Gordon a Shapiro (1956) v modelu, který se později začal označovat jako Gordonův a byl přitažlivý svou jednoduchostí, neboť předpokládal konstantní míru růstu až do nekonečna.

Později, zejména pro účely oceňování neobchodovaných aktiv, se začaly používat propracovanější varianty, které sestávaly v první fázi z kompletního finančního plánu podniku nebo podnikatelského záměru a až ve druhé fázi používají Gordonův vzorec.

Pokud aktivum přináší peněžité nebo v peněžích vyjádřitelné příjmy, lze jej „tržně“ ocenit převedením těchto příjmů na současnou hodnotu pomocí diskontního faktoru založeného na tržních datech. Stejnou úlohu lze spočítat třemi způsoby, které jsou v případě správného dosazení hodnot příslušných veličin vzájemně ekvivalentní. Tyto způsoby pracovně nazveme obecnou metodou (v případě oceňování dluhopisů nazývanou také metodou srážky), metodou „všechno riziko do diskontní míry“ a metodou jistotních ekvivalentů.

Obecná metoda udává, že hodnota aktiva (H) je dána výrazem [1],

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathbf{E}\{C_{t_i}\}}{(1 + i_{t_i} + p_{2,t_i})^{t_i}} \quad [1]$$

ve kterém je střední hodnota náhodné veličiny C_{t_i} popisující peněžní tok nastávající za t_i let od okamžiku ocenění (tj. $\mathbf{E}\{C_{t_i}\}$) diskontována bezrizikovou úrokovou mírou i_{t_i} . Pokud peněžní tok není jistý (tj. variance náhodné veličiny je kladná, tj. $\mathbf{V}\{C_{t_i}\} > 0$) a zároveň subjekty na trhu jsou rizikově averzní, je bezriziková míra ve jmenovateli zvýšena o premii za riziko p_2 .⁵

Čítec zlomku $\mathbf{E}\{C_{t_i}\}$ je dán výhradně charakteristikou oceňovaného aktiva. Naopak bezriziková míra i_{t_i} ve jmenovateli je společná pro všechna aktiva v dané měně příslušné splatnosti, a proto je na oceňovaném aktivu nezávislá. Premie za rizikovou averzi vychází z užitkové funkce subjektu, z jehož pohledu je oceňování prováděno. V případě tržního oceňování je takovým

⁵ Pokud by peněžní tok byl jistý, pak by u něj ani rizikově aversní investoři nepožadovali premii za riziko.

subjektem trh jako celek, tj. jeho průměrní/převažující účastníci. Konkrétní velikost rizikové prémie pak vychází z užitkové funkce subjektu a příslušné úroveň nejistoty ohledně čitatele zlomku.

Metoda „všechno riziko do diskontní míry“ používá v čitateli namísto střední hodnoty náhodné veličiny popisující všechny možné realizace peněžního toku *jen jednu* konkrétní hodnotu peněžního toku, která představuje jeho nasmlouvanou (nebo jinak pravděpodobnou) hodnotu.⁶ Nejistota panující kolem možného kolísání skutečně vyplaceného peněžního toku je odražena v rizikové prémii p_3 ve jmenovateli zlomku [2]. Riziková prémie p_3 tak pokrývá jak riziko, že skutečně vyplacený peněžní tok bude nižší než nasmlouvaný (nebo jinak pravděpodobný, tj. C_{t_i}), tak i rizikovou averzi tržních účastníků.

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{C_{t_i}}{(1 + i_{t_i} + p_{3,t_i})^{t_i}} \quad [2]$$

Tento přístup je typický pro rizikové dluhopisy. Tam pro každý peněžní tok totiž existují pouze 2 případy – buďto bude vyplacen podle původních podmínek, nebo dojde k selhání emitenta a tok vyplacen v nižší výši.⁷ Pokud je známa cena tržní dluhopisu, je možné spočítat jeho výnos do splatnosti. Po odečtení bezrizikové výnosnosti je možné vyčíslit rizikovou prémii p_3 .

Tento přístup je v řadě případů používán i pro oceňování podniků, kdy v čitateli se použije nejlepší odhad⁸ dividend nebo volných peněžních toků (Free Cash Flows, FCF). Nejlepší odhad je pak diskontován požadovanou výnosností odpovídající míře rizika podniku, získanou např. z modelu CAPM (viz kapitola 1.6). Problém této metody spočívá v tom, že nejistota s odhadem čitatele musí být přesně odražena ve jmenovateli, přičemž komplikované způsoby získání jmenovatele z informací o jiných podnicích nebo investicích to nemusí zaručovat.

I pokud je tento postup aplikován správně a dochází k identickým výsledkům jako obecná metoda, je výrazně méně transparentní, protože není jasné, co přesně motivuje výši rizikové přírážky ve jmenovateli. Vysoká riziková přírážka tak může být vysvětlena kombinací (1) nejistoty ohledně dosažení nasmlouvané (nebo jinak pravděpodobné) úrovně peněžních toků v čitateli nebo (2) rizikové averze investorů do daného typu aktiv.

Metoda jistotních ekvivalentů pochází z mikroekonomické teorie rozhodování ekonomických subjektů za rizika. Předpokládá, že pro každou nejistou „sázku“ existuje jistá peněžní částka, která přináší ekonomickému subjektu stejný užitek. Aplikace tohoto konceptu na oceňování⁹ používá v čitateli zlomku hodnotu garantovaného peněžního toku, za který by průměrný tržní

⁶ Pokud se tato hodnota bude rovnat střední hodnotě náhodné veličiny v čitateli rovnice [1], obecná metoda i metoda „všechno riziko do diskontní míry“ jsou ekvivalentní. Charakteristickým rysem metody „všechno riziko do diskontní míry“ ovšem je, že tato hodnota je vyšší než střední hodnota.

⁷ Při selhání emitentů většinou investoři neodejdou zcela s prázdnou. Selhání má většinou podobu (1) snížení jistiny, (2) snížení kupónových plateb, (3) odkladu splátkového kalendáře, příp. (4) kombinaci předchozího. Ztráta investora tak není absolutní. Např. Cruces a Trebesch (2013) uvádí, že průměrná ztráta investorů při selháních svrchovaných emitentů se pohybuje kolem 37 %. Trh velmi často pracuje s předpokladem ztráty při selhání kolem 60 % (viz např. výchozí hodnoty v systému Bloomberg).

⁸ Tímto nejlepším odhadem ale nemusí být očekávaná hodnota ve smyslu střední hodnoty možných výsledků, tj. čísel zlomku [1].

⁹ Toto zavedení je obecnější než klasická mikroekonomická učebnicová verze jistotního ekvivalentu pro případ, že preference subjektu lze popsat funkcí očekávaného užítku (např. Varian, 2010). V takové případě je jistotní ekvivalent $JE(\mathbf{A})$ je definován jako částka a , pro kterou platí, že $u(a) = \mathbf{E}\{u(\mathbf{A})\}$, kde $u(\cdot)$ představuje užitkovou funkci subjektu ve vztahu k bohatství, \mathbf{A} je náhodná veličina charakterizující rozložení nejistých výsledků a $\mathbf{E}\{\cdot\}$ je operátor střední hodnoty.

účastník byl ochoten v budoucnu vyměnit posuzovaný peněžní tok (tj. náhodnou veličinu C_{t_i}). V případě, že posuzovaný peněžní tok je jistý, pak se jeho výše stává jistotním ekvivalentem. V ostatních případech je jistotní ekvivalent nižší¹⁰. Poté, co se posuzované peněžní toky nahradí svými jistotními ekvivalenty, získáváme bezrizikové peněžní toky, které je nutné diskontovat pouze bezrizikovou mírou. Výsledek tak má podobu [3], kde JE představuje funkci jistotního ekvivalentu

$$H = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{JE(C_{t_i})}{(1 + i_{t_i})^{t_i}} \quad [3]$$

Metoda jistotních ekvivalentů se objevuje např. v Geltner et al (2013, Appendix 10c) nebo v Maříková a Mařík (2013, kapitola 13). V praxi se tento přístup alespoň dle zkušeností autora nepoužívá. Důvodem je absence skutečně průkazného způsobu, jak zjišťovat rizikovou averzi tržních účastníků a kalkuloval z ní jistotní ekvivalenty.¹¹

Společným závěrem těchto tří metod je, že bezrizikovou míru nelze v oceňování obejít. U obecné metody a metody diskontních ekvivalentů je navíc bezriziková míra rozhodující složkou diskontní míry. To je důvodem, proč se bezrizikovou mírou detailněji zabývat.

1.4 Bezriziková míra v českém prostředí: podkladový instrument

Koncept bezrizikové míry je do značné míry teoretickým konceptem, neboť žádné aktivum není v praxi zcela bez rizika. Diskontní míra se dříve nerozkládala na komponentu bezrizikové míry a rizikové přírážky (viz metoda „všechno riziko do diskontní míry“ v kapitole 1.3), byla u daného aktiva považována za v čase stabilní a odvozovala se spíše z násobků ročních výnosů, kolik byl investor za aktivum ochoten zaplatit. Koncept bezrizikové míry se dostává do popředí s vývojem teoretických modelů, které s tímto typem aktiva pracují (např. Sharpe 1964).

Jako praktická aproximace bezrizikového aktiva byly užívány americké státní dluhopisy, které se vyznačují dobrou likviditou a malým úvěrovým rizikem. To přestává pro některé aplikace platit od 90. let.

Duffie (1996) si všímá rostoucí tržní segmentace na trhu amerických státních dluhopisů a z toho vyplývající jejich indosynchronické variability vzhledem k jiným finančním veličinám na americkém trhu. Spekuluje, že za tím může být rostoucí „convenience yield“, který odpoutává výnosy státních dluhopisů od výnosů jiných aktiv. Duffie (1996) z tohoto důvodu tvrdí, že již od počátku 80. let 20. století se stávají výnosy státních dluhopisů stále méně relevantní jako bezrizikový benchmark.

Během 90. let snížena emise amerických, britských a dalších vlád vedla k tomu, že řada tržních účastníků začala považovat státní dluhopisy za potenciálně příliš nízký bezrizikový benchmark.

¹⁰ Předpokládá se, že subjekty mají averzi k riziku. Přestože některé subjekty mohou riziko preferovat, pro trh jako celek to neplatí: nepozorujeme totiž, že by riziková aktiva byla na trhu oceněna výše než aktiva bezriziková.

¹¹ Jedním z problémů je tzv. záhada akciové prémie pojmenovaná Mehrou a Prescottem (1985). Podle nich je prémie akciového trhu měřená jako rozdíl realizované výnosnosti akciového trhu oproti realizované výnosnosti státních dluhopisů (cca 6 %) příliš vysoká, než by odpovídalo představě o rizikových preferencích investorů získaných z laboratorních studií nebo šetření (kolem 1 %). Aplikace užitkových funkcí získaných ze studií by tak vedly diametrálně vyšším jistotním ekvivalentům, než jaké odpovídají skutečnému chování investorů na trhu.

Investoři do dluhopisů pak začali používat swapovou křivku¹² jako svůj referenční benchmark pro účely oceňování a analýz (Choudry, 2006). Subjekty ale vždy měly na paměti, že tento benchmark obsahuje jistý objem úvěrového rizika, který ale je pro praktické aplikace nevýznamný.

Z výpočtů Hull et al. (2004), kteří konstruovali bezrizikovou křivku z cen korporátních dluhopisů v USA po očištění o sazby CDS vypsanych na tyto entity, vyplývá, že "skutečná" bezriziková míra leží nad křivkou odvozenou ze státních dluhopisů a pod křivkou odvozenou ze swapů. Přitom ale má tato "skutečná" bezriziková míra v průměru výrazně blíže ke swapům než ke státním dluhopisům.¹³

V současné době existují 2 uznávané zdroje dat pro bezrizikovou míru. Jsou jimi (1) úrokové swapy navázané na sazbu peněžního trhu, ať již Interest Rate Swaps (IRS) nebo Overnight Indexed Swaps (OIS) v příslušné měně, nebo (2) státní dluhopisy s nejnižším úvěrovým rizikem denominované v příslušné měně.¹⁴ Variatou (2) může být i použití dluhopisů s nejnižším úvěrovým rizikem denominovaných v jiné měně po převedení do příslušné měny příslušnými měnovými deriváty (Brada a Brůna, 2014).

Pro rozvinuté měny je tržním standardem využívání OIS. Absence dostatečně transparentního a likvidního trhu s delšími splatnostmi pro korunové nástroje je ovšem překážkou pro využívání OIS pro český trh. To platí i pro variatu (2) používající dluhopisy v jiné měně.

Zbývají tak korunové IRS a korunové státní dluhopisy. Existuje teoretický i empirický základ pro tvrzení, že IRS mohou být vhodnějším zdrojem dat pro bezrizikovou výnosnost než státní dluhopisy.

Teoretický základ názorně ukazuje přístup prezentovaný v Kučera et al (2017). Ten rozděluje (bezkupónovou) výnosnost státních dluhopisů do 4 aditivních složek¹⁵, kterými jsou (1) očekávaná trajektorie měnověpolitických sazeb (tj. rizikově neutrální sazba), (2) prémie za úrokové riziko spojené s nejistotou odhadů očekávané trajektorie měnověpolitických sazeb (tj. odměna za obecné úrokové riziko), a dále (3) prémie za úvěrové riziko emitenta dluhopisu (tj. odměna za specifické úrokové riziko neboli kreditní spread), (4) portfoliový nebo také likviditní efekt, který souvisí s relací mezi nabídkou a poptávkou po tomto dluhopisu jako specifickém investičním aktivu.¹⁶ Přitom součet složek (1) a (2) je v přístupu ztotožněn s bezkupónovou výnosovou míru implikovanou IRS. Složky (3) a (4) nejsou pro bezrizikovou míru relevantní. Složka (3) zjednodušeně představuje úvěrové riziko specifické emitentovi, které by rozhodně nemělo být součástí bezrizikové míry. Složka (4) souvisí se specifiky konkrétního instrumentu. Například v prostředí kurzového závazku docházelo k masivní poptávce po českých státních dluhopisech jako prostředku uložení korunových aktiv do chvíle, kdy ČNB kurzový závazek opustí a koruna zhodnotí. Tato poptávka vedla k silnému portfoliovému efektu a výrazně záporným výnosům krátkodobých českých státních dluhopisů (Obr. 1.3). To vše nastalo situaci,

¹² Úrokový swap se objevil na americkém trhu poprvé v roce 1982 (Smith et al, 1988), přičemž ke konci roku 1987 již činil objem notional principal dolarových úrokových swapů 542 miliard USD.

¹³ Podle Hull et al (2004) je pro tento fakt v USA i daňový důvod, neboť kupóny státních dluhopisů jsou na rozdíl od jiných typů dluhopisů osvobozeny od daní na úrovni států USA.

¹⁴ Pokud stejnou měnu využívá více států, vyvstává otázka, dluhopisy vlády kterého státu použít. Protože se tyto vlády liší úvěrovým rizikem, je rozumné použít tu nejbezpečnější z nich jako bezrizikový benchmark. Viz též Damodaran (2010).

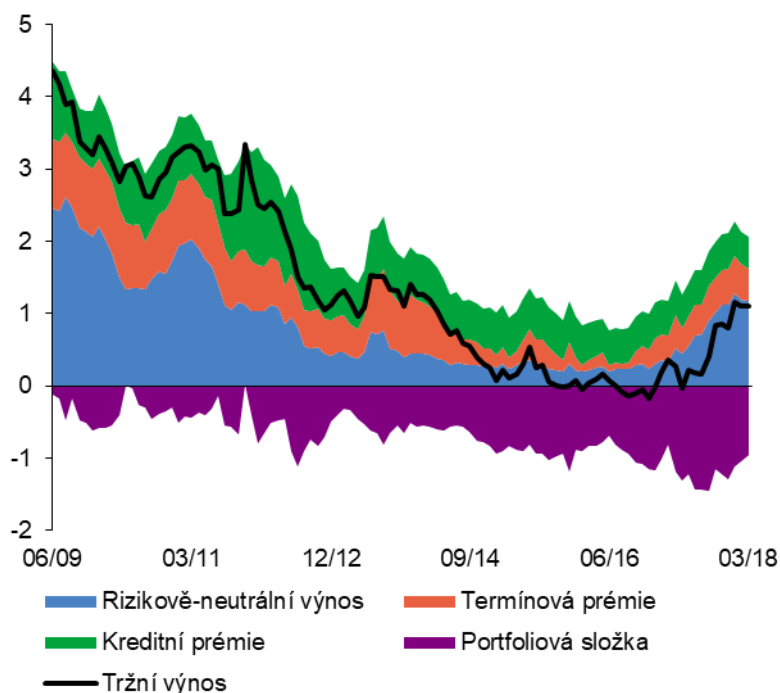
¹⁵ Jiné přístupy, např. Kim a Wright (2005), rozkládají výnos státních dluhopisů na rizikově neutrální výnos a termínovou prémii, která odpovídá součtu složek (2)-(4).

¹⁶ Článek Kučera et al. (2017) je k této dizertační práci relevantní i proto, že v něm užití bezkupónové swapové, resp. dluhopisové křivky jsou konstruovány způsobem popsáním v kapitolách 2, resp. 4.

kdy sazby měnové politiky (dvoutýdenní reposazba i diskontní sazba ČNB), vykazované sazby na mezibankovním trhu (Pribor) a 1leté swapy zůstaly nominálně kladné.¹⁷ Pokud by byly tyto záporné výnosy použity v diskontní míře, pak by došlo k velkému nárůstu růstu cen oceňovaných aktiv, i když tato aktiva nebyla cílem spekulantů.

I pokud bychom nesouhlasili s tvrzením, že úrokové swapy (kvůli jejich založení na sazbách Pribor) i státní dluhopisy lze považovat za dostatečně bezrizikové z hlediska úvěrového rizika, očištění swapů je jednodušší, protože swapy neobsahují složku portfoliového efektu (4).

Obr. 1.3 Rozložení bezkupónového výnosu pětiletého českého státního dluhopisu (v %)



Zdroj: ČNB, Zpráva o finanční stabilitě 2017/2018.

Empirický základ představuje hojné užívání pro tyto účely na finančních trzích i v regulační oblasti, kdy EIOPA jako výchozí možnost předepisuje oceňování závazků pojišťoven bezrizikovou křivkou založenou na tržních kotacích úrokových swapů (EIOPA 2018, s. 6).

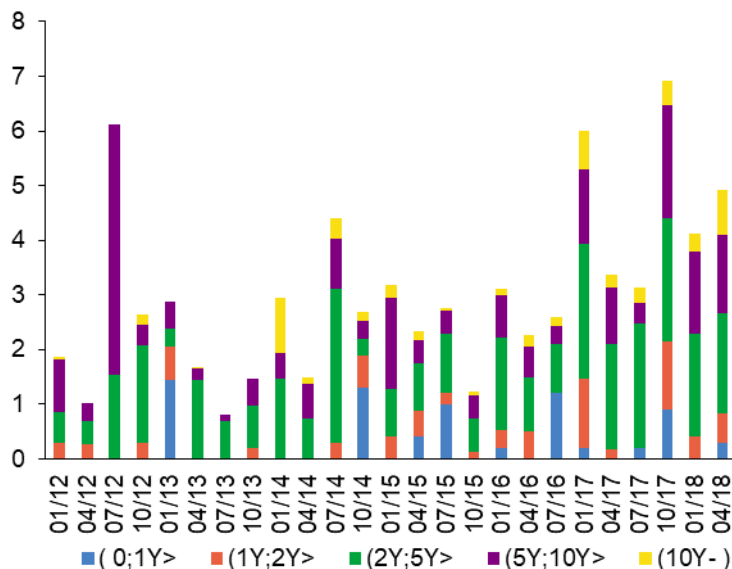
I když obecně jsou IRS pravděpodobně vhodnější než státní dluhopisy, nemusí to platit v případě, že příslušný trh s IRS není dostatečně rozvinutý. V prostředí ČR je třeba se zaměřit na IRS denominované v CZK. Důležitá je dostupnost celé škály splatností kótovaných sazeb na trhu a jeho dostatečná likvidita. Pro CZK IRS jsou k dispozici kótace pro standardní splatnosti v letech až do 10 let, a dále 12, 15 a 20 let, výjimečně i pro splatnosti delší. Likvidita trhu je pochopitelně nižší na delším konci výnosové křivky. IRS trhu totiž dominují banky a jejich horizont je kratší vzhledem k průměrné splatnosti jimi držených státních dluhopisů (kolem 4 let) a průměrné

¹⁷ Existuje ovšem anekdotická evidence, že skutečné sazby obchodů realizované s institucionálními klienty byly mnohdy značně nižší, než byla depozitní sazba ČNB a sazba O/N Pribor. Subjekty tak u českých bank ukládaly za nulové nebo dokonce záporné sazby. Nicméně sazby těchto obchodů byly výrazně vyšší než výnosy krátkodobých státních dluhopisů, které v některých momentech dosahovaly úrovní nižších než -1%. Tento rozdíl nejde vysvětlit rozdílem v úvěrovém riziku velkých bank a vlád na ultrakrátkém horizontu.

úrokové fixaci poskytovaných úvěrů (nejčastější fixace hypoték je 5 let). Přesto, jak ukazuje průzkum ČNB, probíhají i obchody s delšími splatnostmi (Obr. 1.4).

Obr. 1.4 Nominální hodnota CZK IRS sjednaná velkými českými bankami s jinými bankami podle délky trvání swapu

(průměrný denní objem nově sjednaných kontraktů v mld. Kč)



Zdroj: ČNB, Šetření o obratech na peněžním trhu.

Poznámka: Nejsou zahrnuty obchody bank s nebankovními klienty (včetně institucionálních investorů jako jsou pojišťovny, penzijní fondy nebo investiční fondy), jakož i obchody uskutečněné menšími domácími bankami a bankami zahraničními. Celkový objem obchodů tak může být vyšší i dvojnásobně.

1.5 Bezriziková míra v českém prostředí: způsob výpočtu

Bez ohledu na to, zda se zvolí jako zdroj úrokové swapy nebo státní dluhopisy, je nutné zajistit, aby byla k dispozici celá bezriziková výnosová křivka. Vzorce [1] –[3] totiž pracují s tím, že peněžní tok nastávající za několik let musí být diskontován bezrizikovou výnosností (a přírůžkou za riziko) stejné splatnosti. Pokud by tomu tak nebylo, nešlo by o srovnatelné investice. Nelze proto souhlasit s tím, co Damodaran (2010, s. 148) nazývá „praktickým kompromisem“, kdy jedna dlouhodobá splatnost je použita za bezrizikovou míru pro všechny horizonty. Ne vždy vede „praktický kompromis“ ke kvantitativně významné chybě, jeho používání je ale samo o sobě ekonomicky nekonzistentní.

Důsledkem nutnosti zachovávat „symetrii ve splatnosti“ je i to, že pokud podkladový instrument (IRS nebo státní dluhopis) vyplácí nějaké platby před svou splatností (což je případ jak IRS, tak dluhopisů), je potřeba z něj kalkulovat bezkupónovou výnosnost. Bezkupónová křivka – v angličtině označovaná jako *zero-coupon curve* nebo jen *zero curve* (Fabozzi 2012) – udává vztah mezi splatností a výnosovou mírou pro aktivum, které přináší jediný výnos přesně ve své splatnosti. Význam užívání zero křivek je velký zejména u dlouhodobých aktiv (Livingston a Jain 1983). Tady lze naopak s Damodaranem (2010, s. 146) souhlasit, že jiný než bezkupónový výnos nemůže být základem pro bezrizikovou výnosnost, neboť nástroje obsahující peněžní tok ještě před svou splatností obsahují reinvestiční riziko, a jejich výnosy do splatnosti tedy nejsou bezrizikové z pohledu úrokového rizika.

Pozorované swapové sazby nebo výnosy do splatnosti kupónových dluhopisů je tak třeba převést na jejich bezkupónové ekvivalenty. To se neobejde bez přijetí předpokladů o tvaru výnosové křivky. U CZK IRS je tento problém méně palčivý, protože jsou dispozici kontrakty IRS pravidelně odstupňovaných splatností. Při běžně činěném předpokladu, že se platby mění jenom jednou ročně,¹⁸ lze využít „učebnicový“ bootstrap až do splatnosti 10 let. Pro delší splatnosti už je ale předpoklad o tvaru křivek potřeba učinit. O tom pojednává kapitola 2.

U dluhopisů je problém komplikovanější, protože okamžiky výplat kupónů a jistin obecně nenastávají ve stejný okamžik v budoucnosti. „Učebnicový“ bootstrap proto použít nelze. Předpoklad o tvaru výnosové křivky tak zde hraje významnou roli. Častý způsob, který propaguje např. Maříková a Mařík (2012) je použití Svenssonova proložení (Svensson 1994). Vhodnost Svenssonova předpokladu pro český trh zkoumá kapitola 3. Jejím závěrem je, že Svenssonova metoda je pro český trh v zásadě vhodná, protože prokládá pozorovaná tržní data s dostatečnou přesností. Konceptně se ale nejedná o maximálně tržní ocenění, protože předpoklad o základním tvaru křivek (jejichž konkrétní parametry se následně odhadují na tržních datech) je poměrně arbitrární.¹⁹ Navíc zde nastávají problémy s robustností odhadu křivky (Slavík, 2001), neboť metoda využívá velký počet parametrů (6) vzhledem k počtu pozorování (na trhu obchodovaných dluhopisů bylo 21 k březnu 2018).

1.6 Riziková prémie v oceňování aktiv: případ akciových investic a oceňování podniků

Ne všechna aktiva jsou bezriziková. To platí zvláště u dlouhodobých nelikvidních aktiv. Přítomnost rizika pak implikuje potřebu zjištění rizikové premie. Nejobvyklejším způsobem je odhad rozdílu v požadované výnosnosti z příslušného typu aktiva a odečtení této výnosnosti od výnosnosti bezrizikové. Tento rozdíl se pak běžně používá jako p_3 v metodě „všechno riziko do diskontní míry“. I když tato metoda není svou koncepcí ideální, je vhodné zajistit, aby její běžné použití bylo co nejkorektnější.

Kapitola 5 se zaměřuje na odhad rizikové premie pro akciové investice a neobchodované podniky²⁰. V této oblasti je standardem model CAPM²¹, případně zvýšený o další specifické premie, jako premie za neobchodovatelnost, premie za riziko země (např. Damodaran, 2015a), premie za specifické nediverzifikovatelné riziko firmy nebo premie za menší velikost firmy. Tyto další premie jsou v kapitole 5 ignorovány, neboť se konstruují jako aditivní a je možné zaměřit se na CAPM izolovaně.

Není bez zajímavosti, že se model CAPM prosadil do tržní praxe i přesto, že jeho empirické výsledky jsou leckdy neuspokojivé. Odhady regresní rovnice v modelu CAPM jsou pro některá

¹⁸ Což není pravda. U CZK IRS se splatností 1 rok se mění čtvrtletně; u ostatních CZK IRS se mění pololetně. Tato aproximace má ale malý vliv na výslednou bezkupónovou křivku.

¹⁹ Svenssonova funkce nemá oporu v teorii dluhopisových trhů. Její charakterizace vychází z obecného tvaru řešení diferenciálních rovnic.

²⁰ V případě nemovitostí se běžně používá investory požadovaná výnosová míra pro příslušný segment nemovitostního trhu (1) zjištěná v šetření mezi subjekty na trhu nebo (2) implicitně odvozená z cen transakcí (např. čtvrtletní ročenka Prague City Report od Jones Lang LaSalle). Pro ČR se v roce 2018 pohybuje v rozmezí kolem 4.5-6 %, což je méně, než udávají běžně používané odhady požadované výnosnosti u akcií.

²¹ Mezi další varianty patří vícefaktorové modely, jako např. třífaktorový model Fama a French (1992), které jsou rozšířením CAPM modelu o další proměnné a zcela flexibilní přirážková metoda (build-up method), ve které je riziková premie součtem přirážek za různé typy rizik (např. Maříková a Mařík 2011, kap. 4.1.6.5)

aktiva velmi volatilní (a statisticky nesignifikantní) nebo vedou ke z ekonomického pohledu příliš vysokým nebo příliš nízkým hodnotám rizikové prémie (Fama a French, 2004). Model tak správně neodráží skutečné preference a chování investorů na trhu. Jeho jednoduchost a přitažlivost jeho teoretického zdůvodnění však vedou k jeho oblibě coby aproximace skutečného chování.

Riziková prémie v CAPM (Sharpe, 1964) se kalkuluje jako

$$p_{3,t_i} = \beta \cdot (r_{M,t_i} - i_{t_i}) \quad [4]$$

kde faktor β odráží relativní citlivost odvětví působení oceňovaného podniku vzhledem ke kapitálovému trhu jako celku. Ten je převzat ze CAPM modelu odhadnutého na akcích (co nejpodobnějších) kótovaných podniků ze stejného odvětví, pro které existují data. V zásadě existují 3 varianty odhadu: (1) regrese cen akcií oceňovaného podniku vůči akciovému indexu v dané měně, (2) regrese cen akcií vybraných podobných obchodovaných podniků vůči akciovému indexu v jejich měně nebo (3) použití publikované hodnoty β pro příslušná odvětví (udává na svých stránkách např. A. Damodaran). V případě ČR je nasnadě, že varianta (1) je nepoužitelná, pokud oceňujeme kterýkoli podnik jiný než hrstku kótovaných. U metody (2) je komplikací, že aby byl zajištěn dostatečně velký vzorek srovnatelných firem, je třeba se uchýlovat k zahraničním kótovaným podnikům. U metody (3) je tento problém ještě závažnější, protože žádný autorovi známý zdroj nepublikuje hodnotu konkrétně pro ČR nebo CEE region. Data vychází z USA/Velké Británie, příp. rozvinutých trhů Evropy a rozvíjející se státy jsou většinou soustředěny do jedné nebo několika širokých kategorií. Volba faktoru β pro méně rozvinutý trh je pak spíše uměním než vědou a „umělec“ musí vhodně nakombinovat různé hodnoty od konečného odhadu β .²² Neschopnost faktor β spolehlivě odhadovat často ústí v užívání bayesovského odhadu (Vašíček 1973), kdy je jako apriorní informace užívána hodnota $\beta = 1$, neboť v dlouhém období a napříč trhem by měla β podniků konvergovat k této hodnotě. r_{M,t_i} je výnosnost kapitálového trhu jako celku a i_{t_i} pak odpovídá bezrizikové výnosnosti. Jejich rozdíl, tj. $(r_{M,t_i} - i_{t_i})$ je tzv. akciová neboli ekvitní prémie.

Protože rizikové prémie lze na rozdíl od bezrizikové míry diferencovat podle splatnosti příslušného peněžního toku jen velmi obtížně, v praxi téměř vždy dochází ke zjednodušení, kdy pro všechny splatnosti je předpokládáno $r_{M,t_i} = r_M$ a $i_{t_i} = i$, a tedy i prémie $p_{3,t_i} = p_3$ se aplikuje na všechny budoucí peněžní toky ve stejné výši. Pokud se ale používá prémie ve stejné výši na všechny peněžní toky, měla by být kalibrována pro takovou splatnost, která odpovídá „těžišti“ peněžních toků z oceňovaného aktiva (obdoba durace u dluhopisů). „Těžiště“ se liší případ od případu. Damodaran (2010) ji pro celý americký trh odhaduje někde kolem 10 let. Růstové podniky mají tuto hodnotu delší, podniky stagnující nebo skomírající ji mají nižší. Pokud volíme těžiště jako 10leté, pak to znamená, že pro odhad prémie by desetiletá výnosnost akcií měla být porovnáována s desetiletou bezrizikovou mírou.

²² Řešením pro země s méně rozvinutým kapitálovým trhem by mohl být CAPM model odhadnutý na tržbách nebo provozních ziscích odvětví vůči tržbám nebo provozním ziskům celé ekonomiky (tj. diverzifikovaný model). Případně by šlo použít poměr jejich volatility (tj. nediverzifikovaný model). Data pro tyto přístupy by mohla být jak granulární z účetnictví podniků zařazených do příslušných odvětví, tak data národohospodářská. Obojí je pro ČR k dispozici. Přesto se autor doposud nesetkal s příkladem takového použití.

K měření prémie lze přistoupit dvěma způsoby: jako *prémie implikovaná trhem* nebo jako *historicky realizovaná prémie*.

Prémie implikovaná trhem je jednoznačně superiorní řešení (např. Damodaran 2015). Důvodem je vpředhlednost této prémie, neboť je vypočtena z aktuálních tržních dat. Způsob výpočtu bere v úvahu současné ceny akcií a očekávané dividendy (na úrovni jednotlivých akcií nebo na úrovni celého tržního indexu). Veličinou, která dává do rovnováhy současnou hodnotu očekávaných dividend a aktuální tržní cenu je diskontní míra, kterou lze považovat za požadovanou výnosnost průměrného investora. Po odečtení bezrizikové výnosové míry dostáváme akciovou prémii. Výpočet je samozřejmě poplatný kvalitě odhadů o budoucích dividendách. Ty jsou pro krátké období k dispozici jako konzensus odhadů analytiků, které publikuje např. Bloomberg nebo Reuters. Míra růstu očekávaných dividend v další budoucnosti už ale zjišťována není a tato fáze se nejen nejhůře prognózuje, ale má i rozhodující dopad na výši akciové prémie. Pro ČR tato možnost existuje jen omezeně, protože počet subjektů na pražské burze je malý a likvidita trhu taktéž (viz Dvořák 2015). Proto je asi jedinou možností si zcela nebo částečně vypomáhat i daty z jiných trhů po zohlednění specifik jednotlivých trhů.

Historicky realizovaná prémie se měří jako rozdíl průměrné výnosnosti realizovaná za velmi dlouhý úsek v minulosti. Toto je nejčastější přístup i v USA, kde jsou k dispozici dobrá data i pro výpočet implikované prémie (Damodaran 2010).

Vzhledem k tomu, že český akciový trh nemá příliš dlouhé časové řady, je jedinou možností použít hodnotu z rozvinutého trhu, nejčastěji z USA, publikovaný v ročenkách Ibbotson Associates (Ibbotson et al. 2016), Duff and Phelps (Grabowski et al. 2017) nebo publikované A. Damodaranem na jeho webových stránkách. To přináší řadu obtíží. *První* je nutnost argumentace, že historická výnosnost v USA je relevantní pro ČR a v dnešním prostředí. Je známým faktem, že trh USA byl ve 20. století velmi úspěšný (Jorion a Goetzmann, 1999, Mehra 2011). Podobnou úspěšnost by ve stejném období nešlo předpokládat pro ČR, i kdybychom měli data pro ČR k dispozici. Tím vzniká tzv. survivorship bias, který vedle k nadhodnocení prémie. Navíc současné prostředí v ČR je charakterizováno nízkými výnosy z tradičních aktiv v důsledku nestandardních měnových politik centrálních bank, které se přelévají do vysokých výnosů z alternativních aktiv. Je proto otázka, nakolik jsou pro toto prostředí relevantní data z dřívějších období. Vzhledem k vysoké volatilitě akciových výnosů v čase má délka uvažovaného období velký vliv na výslednou hodnotu rizikové prémie.

Druhou je častá nekonzistence v případě výpočtu historické výnosnosti. Je totiž otázkou, zda volit průměr geometrický nebo průměr aritmetický. Tento problém není teoreticky vyřešen. Studie Fernández (2006) ukazuje mírnou preferenci pro geometrický průměr v amerických učebnicích financí a oceňování. Z české literatury Mařík et al. (2011a) doporučuje průměr geometrický. A. Damodaran publikuje průměry oba. Přitom je jasné, že užití aritmetického průměru vede k vyšším hodnotám prémie než užití geometrického průměru. Na tento problém se zaměřuje kapitola 5.

Že aritmetické ani geometrické průměry historických dat nejsou nevyčýleným odhadem budoucího zhodnocení, je dlouhodobě známo (Cheng and Deets, 1971, Blume, 1974). Implikací volby průměru si všímá i Indro a Lee (1997) a Jaquier et al (2003), přičemž přichází na myšlenku, že správný průměr je vždy někde mezi geometrickým a aritmetickým. Jejich analýzy se ale zaměřují na očekávanou terminální hodnotu portfolia, a nikoli očekávané na průměrné zhodnocení.

Ze statistického hlediska nachází kapitola 5 typ "combinatorial estimator" podle klasifikace Hasbrouck (1983). Rozdílem ovšem je, že kapitola 5 nehledá nevyčýlený odhad hodnoty

kapitálu na konci investičního horizontu, ale nevychýlený odhad průměrného zhodnocení, což je pro účely odhadu rizikových premií vhodnější. Výhodnou rovněž je, že kapitola 5 dospívá k jednoduché výpočetní formuli. Není proto nutné provádět výpočetně nesmírně náročné procházení všech přípustných kombinací jednoletých výnosů.

Literatura

- [1] ABAD, J. et al (2016). *Shedding light on dark markets: First insights from the new EU-wide OTC derivatives dataset*. ESRB Occasional Paper No. 11/September 2016. https://www.esrb.europa.eu/pub/pdf/occasional/20160922_occasional_paper_11.en.pdf
- [2] BABCOCK, F. M. (1932). *The valuation of real estate*. New York: McGraw-Hill.
- [3] BCBS (2017). *The regulatory treatment of sovereign exposures*. Discussion Paper Issued for comment by 9 March 2018. <https://www.bis.org/bcbs/publ/d425.pdf>
- [4] BLUME, M. E. (1974). *Unbiased Estimators of Long-Run Expected Rates of Return*. Journal of the American Statistical Association 69, 347, 634-638.
- [5] BRADA, J., BRŮNA, K. (2014). *Transfer bezrizikové míry výnosnosti v USD do CZK s využitím basis swapů*. Oceňování : čtvrtletník, sv. 7, č.4, s. 3-25.
- [6] BREALEY, R. A., MYERS, S. C., ALLEN, F. (2014). *Teorie a praxe firemních financí*. Bizbooks, 2011.
- [7] CRUCES, J. J., TREBESCH, C. (2013). *Sovereign Defaults: The Price of Haircuts*. American Economic Journal: Macroeconomics 5 (3), pp. 85-117.
- [8] CHENG, P. L., DEETS, M. K. (1971). *Statistical Biases and Security Rates of Return*. Journal of Financial and Quantitative Analysis, 6, 3, 977-994.
- [9] CHOUDHRY, M. (2006). *An alternative bond relative value measure: Determining a fair value of the swap spread using Libor and GC repo rates*. Journal of Asset Management 7, 1, 17-21.
- [10] DAMODARAN, A. (2010). *The Dark Side of Valuation*. Second Edition. Pearson FT Press.
- [11] DAMODARAN, A. (2015). *Equity Risk Premiums: Determinants, Estimation and Implications – The 2015 Edition*. <https://ssrn.com/abstract=2581517>
- [12] DAMODARAN, A. (2015a). *Country Risk: Determinants, Measures and Implications – The 2015 Edition*. <https://ssrn.com/abstract=2630871>
- [13] DUFFIE, G.R. (1996). *Idiosyncratic Variation of Treasury Bill Yields*. Journal of Finance, 51, 2, 527-551.
- [14] DVOŘÁK, M. (2015). *Ekvitní prémie z českých dat: konstruktivní kritika*. Oceňování : čtvrtletník. 2015. sv. 8, č. 2, s. 27-46.
- [15] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) (2015). *Guidelines on the extension of the recovery period in exceptional adverse situations*. https://eiopa.europa.eu/GuidelinesSII/EIOPA_EN_ERP_GLs.pdf

- [16] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) (2018). *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*. 31 January 2018.
<https://eiopa.europa.eu/Publications/Standards/Technical%20Documentation%20%2831%20Jan%202018%29.pdf>
- [17] FABOZZI, F. J. (2012) (ed). *The Handbook of Fixed Income Securities*. Eight Edition. McGraw-Hill.
- [18] FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (1992). *The Cross-Section of Expected Stock Returns*. The Journal of Finance 47, 2, pp. 427-465.
- [19] FAMA, E. F., FRENCH, K. R. (2004). *The Capital Asset Pricing Model: Theory and Evidence*. Journal of Economic Perspectives 18, 3, 25-46.
- [20] FAMA, E. F., BLISS, R. R. (1987). *The Information in Long-Maturity Forward Rates*. American Economic Review 77, 4, 680-692.
- [21] FISHER, I. (1906). *The nature of capital and income*. New York: Macmillan.
- [22] FERNÁNDEZ, P. (2006). *The equity premium in finance and valuation textbooks*. University of Navarra Working Paper 657.
- [23] FISHER, I. (1930). *The theory of interest*. New York: Macmillan.
http://files.libertyfund.org/files/1416/Fisher_0219.pdf
- [24] GELTNER, D. M. et al. (2013). *Commercial Real Estate Analysis and Investments*. 2nd Edition. South-Western Educational Publishing.
- [25] GORDON, M. J., SHAPIRO, E. (1956). *Capital Equipment Analysis: The Required Rate of Profit*. Management Science, 3, 1, 102-110
- [26] GRABOWSKI, R. J. et al. (2017). *2017 Valuation Handbook – International Guide to Cost of Capital*. John Wiley and Sons.
- [27] HULL, J., PREDESCU, M, WHITE, A. (2004). *The relationship between credit default swap spreads, bond yields, and credit rating announcements*. Journal of Banking & Finance 28, 11, 2789-2811.
- [28] IBBOTSON, R. et al. (2016). *2016 Stocks, Bonds, and Inflation (SBBI) Yearbook*. 1st Edition. John Wiley and Sons.
- [29] INDRO, D. C., LEE, W. Y. (1997). *Biases in Arithmetic and Geometric Averages as Estimates of Long-Run Expected Returns and Risk Premia*. Financial Management, 1997, 26, 4, 81-90.
- [30] JACQUIER, E., KANE, A., MARCUS, A. J. (2003). *Geometric or arithmetic mean: A reconsideration*. Financial Analysts Journal 59, 6, 46-53.
- [31] JORION, P., GOETZMANN, W. N. (1999). *Global Stock Markets in the Twentieth Century*. Journal of Finance, 54, 3, pp. 953-980.
- [32] KIM, D. H., WRIGHT, J. H. (2005). *An Arbitrage-Free Three-Factor Term Structure Model and the Recent Behavior of Long-Term Yields and Distant-Horizon Forward Rates*. Finance and Economics Discussion Series 2005-33, Federal Reserve Board.
<https://www.federalreserve.gov/pubs/feds/2005/200533/200533pap.pdf>

- [33] KIRZNER, E. (2006). *The Search For Intrinsic Value: Some Selected Moments in the History of DPV*. Rothman School of Management, University of Toronto
<http://www.rotman.utoronto.ca/icpm/The%20Search%20for%20Intrinsic%20Value%20Kirzner.ppt>
- [34] KISLINGEROVÁ, E. (2001). *Oceňování podniku*. 2. přepracované a doplněné vydání. C. H. Beck.
- [35] KUČERA, A., DVOŘÁK, M., KOMÁRKOVÁ, Z. (2017). *Longer-term Yield Decomposition: An Analysis of the Czech Government Yield Curve*. CNB Working Paper 12/2017.
- [36] LIVINGSTON, M., JAIN, S. (1982). *Flattening of Bond Yield Curves for Long Maturities*. Journal of Finance 37, 1, 157-167.
- [37] MARSHALL, A. (1893). *On rent*. Economic Journal, Vol. 3.
- [38] MARSHALL, A. (1920). *Principles of economics*. 8th ed. London: Macmillan.
- [39] MAŘÍK, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: Hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.
- [40] MAŘÍK, M. et al. (2011a). *Metody oceňování podniku: Proces ocenění, základní metody a postupy*. 3. upravené a rozšířené vydání. Praha: Ekopress.
- [41] MAŘÍKOVÁ, P., MAŘÍK, M. (2012). *Odvozování bezrizikové výnosové míry z tržních dat pomocí Svenssonovy metody*. Odhadce a oceňování majetku 4/2012, s. 67-79.
- [42] MEHRA, R. (ed) (2011). *Handbook of the Equity Risk Premium*. North-Holland Elsevier Handbooks in Finance.
- [43] MEHRA, R., PRESCOTT, E. C. (1985). *The Equity Premium: A Puzzle*. Journal of Monetary Economics, 15, 2, pp. 145-161.
- [44] MOORE, J. W. (2009). *A history of appraisal theory and practice: Looking back from IAAO's 75th year*. Journal of Property Tax Assessment & Administration 6 (3): 23-49.
- [45] PICKETTY, T. (2013). *Capital in the Twenty-First Century*. Harvard University Press.
- [46] SHARPE, W. F. (1964). *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*. Journal of Finance, 19, 3, 425-442.
- [47] SLAVÍK, M. (2001). *Odhad časové struktury úrokových sazeb z cen domácích dluhopisů*. Finance a úvěr, 51,11, 591-606.
- [48] SMITH, C. W. et al (1988). *The Market for Interest Rate Swaps*. Financial Management 17, 4, 34-44.
- [49] SVENSSON, L. E. O. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-4*. IMF Working Paper 1994/114.
- [50] VARIAN, H. R. (2010). *Intermediate Microeconomics: A Modern Approach*. Eighth Edition. W. W. Norton & Company.
- [51] VASICEK, O. A. (1973). *A Note on using Cross-Sectional Information in Bayesian Estimation of Security Betas*. The Journal of Finance 28, 5, pp. 1233-1239.
- [52] WEBB, C. A. (1909). *Valuation of real property*. London: Crosby Lockwood and Son.

[53] WILLIAMS, J. B. (1938). *The Theory of Investment Value*. Harvard University Press.

Kapitola 2

Užití swapových sazeb pro stanovení diskontní míry se zřetelem na Českou republiku

Abstrakt

Článek poskytuje ucelený pohled na využití úrokových swapů při stanovení bezrizikové míry ve výnosovém ocenění v prostředí českého trhu. Nejprve testuje splnění pěti požadavků kladených na korektní způsob stanovení bezrizikové výnosové míry – tržní konformita, bezrizikovost, dostatečný počet splatností a dostatečná likvidita kontraktů a slučitelnost s ostatními prvky diskontní míry. Je ukázáno, že korunové úrokové swapy splňují všechny podmínky. Dokonce podle dvou ze tří definic bezrizikovosti jsou méně rizikové než běžně užívané státní dluhopisy. Dále je poskytnut postup výpočtu nutný k implementaci metody, včetně přesnějšího překlenovacího řešení pro horizonty, pro které nejsou k dispozici swapové kontrakty. Inovativní metoda úrokových swapů tak tvoří důstojnou alternativu k zatím převažující praxi odvozování bezrizikových sazeb z výnosností státních dluhopisů.

2.1 Úvod

Korektní určení bezrizikových výnosových měr je důležitou součástí stanovení diskontní míry pro převedení budoucích peněžních toků či výnosů na současnou hodnotu. I poměrně malá odchylka v bezrizikové míře může mít kvantitativně nemalý dopad na výsledné ocenění. Navíc se bezrizikové míry mohou pro svou zdánlivou jednoznačnost stát předmětem sporů.²³ Proto je v literatuře (např. Mařík et al., 2011, Maříková – Mařík, 2012) tématu věnován značný prostor.

Jedním z inovativních postupů je užití úrokových swapů (IRS) z lokálního trhu namísto obvykle používaných státních dluhopisů z rozvinutého trhu. To přináší své výhody, ale i nevýhody, přičemž čtyři teoretické a praktické aspekty nejsou literaturou uspokojivě popsány. Zaprvé, není dostatečně diskutována rizikovost swapových kontraktů ve srovnání s vládními dluhopisy. Zadruhé, je otázkou dostatečná likvidita swapových kontraktů, tedy zda jsou jejich sazby stanoveny na základě odpovídajícího množství skutečných obchodů. Zatřetí, užívání lokálních úrokových swapů v CAPM modelu, kde minimálně beta faktor je odvozen z jiného trhu, vyžaduje

²³ Bezriziková míra má na výsledek ocenění dosti pravděpodobně nižší vliv než například strategický plán, na základě kterého je vypočteno volné cash flow nebo čisté zisky. Na rozdíl od strategických plánů jsou ale výnosnosti bezrizikových instrumentů běžně k dispozici. To dává subjektům příležitost tázat se oceňovatele, proč použil příslušnou bezrizikovou míru. Pak dochází k paradoxu, že například bezriziková diskontní míra je stanovena s přesností na dvě desetinná místa, kdežto volné cash flow je získáno z oceňovatelem konstruovaného 15 letého plánu, přičemž strategický horizont plánů téměř 2 třetin velkých podniků nepřesahuje 4 roky (A. T. Kearney, 2011, s. 18).

komentář. Začtvrté, není běžně popsán způsob, jak konzistentně dopočítat spotové výnosové míry ze swapových sazeb, pokud chybí swapové kotace pro některé splatnosti. Cílem tohoto článku je tyto otázky diskutovat.

Text je koncipován tak, aby poskytl ucelený pohled na využití korunových úrokových swapů pro stanovení diskontní míry v podmínkách českého trhu. V kapitole 2.2 je pro tuto metodu testováno splnění klíčových požadavků kladených na korektní způsob stanovení bezrizikové výnosové míry. Postup výpočtu, nutný k implementaci metody, je popsán v kapitole 2.3. Kapitola 2.4 obsahuje závěrečné shrnutí.

2.2 Podmínky kladené na bezrizikovou míru

V literatuře i oceňovací praxi existuje více postupů ke stanovení bezrizikové výnosové míry. Který postup je nejvhodnější? Při zodpovězení této otázky můžeme vyjít z pěti klíčových podmínek kladených na bezrizikové míry. Těmi jsou:

1. **Tržní konformita.** Jde-li o tržní ocenění, data jsou převzata z trhu.
2. **Bezrizikovost.** Použitý instrument je svým charakterem dostatečně bezrizikový.
3. **Dostupnost dat.** Data jsou dostupná v potřebném počtu splatností.
4. **Kvalita dat.** Data jsou podložena skutečnými obchody.
5. **Slučitelnost s ostatními komponentami diskontní míry.** Získané bezrizikové míry mohou být použity společně s ostatními prvky, v modelu CAPM tedy s beta faktorem a premii za ekvitérní riziko.

Je třeba si uvědomit, že se nejedná o „buď – anebo“ vlastnosti, splnění podmínek můžeme hodnotit na spojitě škále od „zcela nesplněno“ až po „zcela splněno nebo splněno v maximální prakticky možné míře“. Preferovaný přístup k bezrizikovým mírám je takový, který si vede co nejlépe ve všech dimenzích.

Nyní otestujeme míru splnění podmínek pro přístup využívající korunové úrokové swapy. V části 2.1 prozkoumáme tržní konformitu, v části 2.2 bezrizikovost, v části 2.3 dostupnost dat, v části 2.4 kvalitu dat a konečně v části 2.5 slučitelnost s dalšími komponentami diskontních měř.

2.2.1 Tržní konformita

Je nutné, aby použitá bezriziková míra byla relevantní pro budoucí období, ve kterém dojde k realizaci výnosového toku. Obecně přicházejí v úvahu následující 4 metodologické přístupy.

1. **Historické údaje o realizované výnosnosti** „bezrizikových“ instrumentů, za učiněného předpokladu o opakování historie.
2. **Aktuální kotace** „bezrizikových“ instrumentů na trhu, ze kterých lze výnosnosti dovodit.
3. **Představy analytiků o očekávané výnosnosti** „bezrizikových“ instrumentů.
4. Analytické úsudky postavené na výše uvedeném.

Pro *tržní* ocenění je kladen požadavek, aby užitá bezriziková míra byla co nejvíce postavena na datech ověřených trhem. Proto je teoreticky nejvhodnější přístup 2: tam je tržní ověření absolutní.

Méně vhodné jsou pak přístupy 1 a 3. Historická data ověřena trhem kdysi byla, jejich použití je však ospravedlnitelné pouze tehdy, domníváme-li se, že se budoucí vývoj bude podobat

historickému. To vyžaduje analytický úsudek oceňovatele. Očekávání analytiků v přístupu 3 trhem ověřena nejsou, a mohou tak být příliš subjektivní.²⁴

V praxi trpíme takřka vždy nedostatkem tržních dat k tomu, abychom stanovili bezrizikové diskontní míry výhradně na základě tržních dat, tj. použili přístup 2. Tyto údaje proto musíme doplnit předpoklady o chování těchto měr v období, pro která chybí tržní data. To nastává buďto pro mezidobí nebo za horizontem dat pro nejdelší splatnost. Jsme tedy u přístupu 4. Požadavek „tržnosti“ se pak transformuje na požadavek využívání tržních dat v maximální možné míře. Jinými slovy, pokud pro danou splatnost existuje údaj na trhu, použijme jej.²⁵

Z této diskuse vyplývá, že **přístup založený na kotacích úrokových swapů** ke dni ocenění, dále prezentovaný v tomto článku, **dokonale splňuje podmínku tržnosti**.

2.2.2 Bezrizikovost

Instrument, jehož výnosnosti nebo kotace budou základem pro bezrizikovou míru, by měl být z podstaty věci co nejvíce bezrizikový. Nejprve proto představíme definice bezrizikovosti. Pak se podíváme, nakolik je splňují dnes v praxi nejběžněji používané instrumenty – americké vládní dluhopisy – a nakolik je splňují dolarové úrokové swapy. Prověření na českých státních dluhopisech a korunových swapech nebudeme kvůli krátkým časovým řadám provádět a spokojíme se s předpokladem, že závěry pro americký trh jsou přenositelné i na trh český. Nakonec uvedeme několik výhod úrokových swapů.

V zásadě existují tři pohledy na bezrizikovost.

- 1. Teoretická (a intuitivní) definice.** Bezrizikovost je ve finanční ekonomii chápána jako vlastnost, že skutečné výnosy za dobu držby jsou vždy přesně rovné jedinému předem očekávanému výnosu (Damodaran 2008, s. 3.). Neboli, není zde žádné kolísání okolo očekávaného výnosu (Damodaran 2008, s. 4), a tedy žádné riziko v běžně užívaném slova smyslu. Ilustrace této definice je v Tabulce 2.1.

Tab. 2.1 Ilustrace teoretické definice bezrizikovosti

	Aktivum A		Aktivum B		Aktivum C	
	Cena za rok	Výnosnost	Cena za rok	Výnosnost	Cena za rok	Výnosnost
Očekávání	1 050	5%	1 050	5%	1 050	5%
Scénář reality 1	1 050	5%	1 040	4%	1 060	6%
Scénář reality 2	1 050	5%	1 050	5%	1 060	6%
Scénář reality 3	1 050	5%	1 060	6%	1 060	6%

Poznámka: Dnešní cena aktiva A, B i C je 1000. Scénářem vývoje může být cokoliv. Aktivum A je bezrizikové. Aktiva B a C nejsou bezriziková, protože existují scénáře, ve kterých se nastalá výnosnost liší od očekávané.

²⁴ Není jasné, zda analytici poskytující svá očekávání na základě těchto očekávání skutečně obchodují. Pokud ano, stále tvoří pouze malou část účastníků trhu. Pokud ne, nabízí se otázka, nakolik je jejich odhad dán snahou ovlivnit chování těch, kteří tento odhad budou přejímat, ve svůj prospěch. Damodaran (2013b, s. 19-20) navíc uvádí, že názory analytiků špatně předpovídají budoucí výnosnosti.

²⁵ Otázka je, zda přejímat data z trhu, i když jsou nekvalitní – například zkreslená malou likviditou trhu. To postihuje podmínka na kvalitu dat (diskutovaná v části 2.2.4). Zde vidíme, že vyšší splnění jedné podmínky může být vykoupeno horším splněním jiné podmínky.

2. **CAPM definice.** Bezrizikové aktivum je takové, které je nekorelované s ostatními aktivy na trhu.²⁶ Teoretická definice vždy implikuje i CAPM definici, protože když je výnosnost aktiva vždy konstantní, je rovněž nezávislá na pohybu dalších aktiv (Damodaran 2008, s. 4.).
3. **Praktická definice.** Bezrizikovost je v praxi často interpretována jako nízké riziko úpadku emitenta instrumentu. Proto jsou primárně voleny instrumenty s vysokým ratingem.

Nejvhodnější a nejpřísnější definice je první; pokud používáme CAPM model, je dostatečná i definice druhá. Praktická definice je však velkým zjednodušením. A to proto, že odlišnost skutečné výnosnosti od očekávané může nastat ze tří důvodů.

1. Úpadku emitenta (**úzce chápané kreditní riziko**).
2. Kolísání jeho kreditního ratingu, tedy změny pravděpodobnosti, že v budoucnu dojde k úpadku. To se odrazí na tržní ceně instrumentu (**široce chápané kreditní riziko**).
3. Změn úrokových sazeb centrální banky, atraktivity instrumentu vůči alternativním investicím, jakož i všech racionálních a neracionálních faktorů stojících za nabídkou a poptávkou po instrumentu, které ovlivňují jeho tržní cenu (**obecné tržní riziko**).

Nelze proto považovat kreditní riziko za jediný zdroj rizika; riziko kolísání ceny instrumentu v důsledku druhého a zejména třetího bodu je významným zdrojem nestability.

Prakticky vzato, bezrizikovým aktivem splňujícím nejpřísnější Teoretickou definici budou hotovostní peníze s vždy nulovým výnosem, bankovní úložky s pevným výnosem nebo zahedgované pozice; nic z toho se běžně jako bezrizikové míry nepoužívá. Hodnota státních dluhopisů, včetně krátkodobých pokladničních poukázek v USA, v čase fluktuuje. To je ukázáno v Tabulce 2.2. Stejně tak swapové sazby v čase fluktuují. Protože tyto fluktuace nelze dokonale předvídat, jedná se o důkaz, že běžně používané bezrizikové instrumenty jsou ve skutečnosti nezanedbatelně rizikové.

Přesuňme se tedy k méně přísné CAPM definici. Podle ní bezriziková míra nemá kolísat společně s výnosem těch instrumentů, které tvoří tržní portfolio v rámci CAPM. Tím je nejčastěji široce definovaný akciový index, např. S&P 500. Přestože teorie (např. Musílek 1999, s. 211-213) tvrdí, že akcie, a tudíž i akciové indexy, jsou negativně korelovány s úrokovými měrami, roční data pro USA z let 1928-2012 ukazují, že mezi výnosy akcií a dluhopisů je nejednoznačný vztah. Korelace mezi S&P a tříměsíčními i desetiletými státními dluhovými cennými papíry je v tomto období minimální a daleko mimo statistickou významnost. To je ukázáno v Tabulce 2.2.

Korelace však nejsou stálé. Pokud zkoumáme korelaci mezi S&P a výnosem dlouhodobých státních dluhopisů pro různá třináctiletá období, zjistíme, že se korelace silně mění v čase – od -0,8 do 0,68. Pokud zkoumáme korelaci obou veličin od počátku datového souboru v roce 1928 až do koncového roku (tak se uživatelům dlouhodobá korelace postupem let jevila), obdržíme hodnoty v rozmezí -0,15 až 0,15 podle toho, ve kterém koncovém roce jsme. Posledně, pokud vycházíme z roku 2012 a zkoumáme korelaci v závislosti na tom, jak hluboko do historie jdeme, obdržíme hodnoty kolem -0,8 u krátkodobých dat až kolem 0 u nejdelších dat. Vše je ukázáno na

²⁶ Jinými slovy, bezrizikové aktivum je takové, které má beta faktor rovný nule (viz rovnice [8] a [10] v části 2.2.5).

Obrázku 2.1. Z toho lze vyvodit, že ačkoli ve velmi dlouhém období mezi veličinami významný vztah není, ve střednědobém horizontu mohou nastat období velmi silné provázanosti. Proto je CAPM definice pro dlouhodobé státní dluhopisy splněna pouze s velkými výhradami.

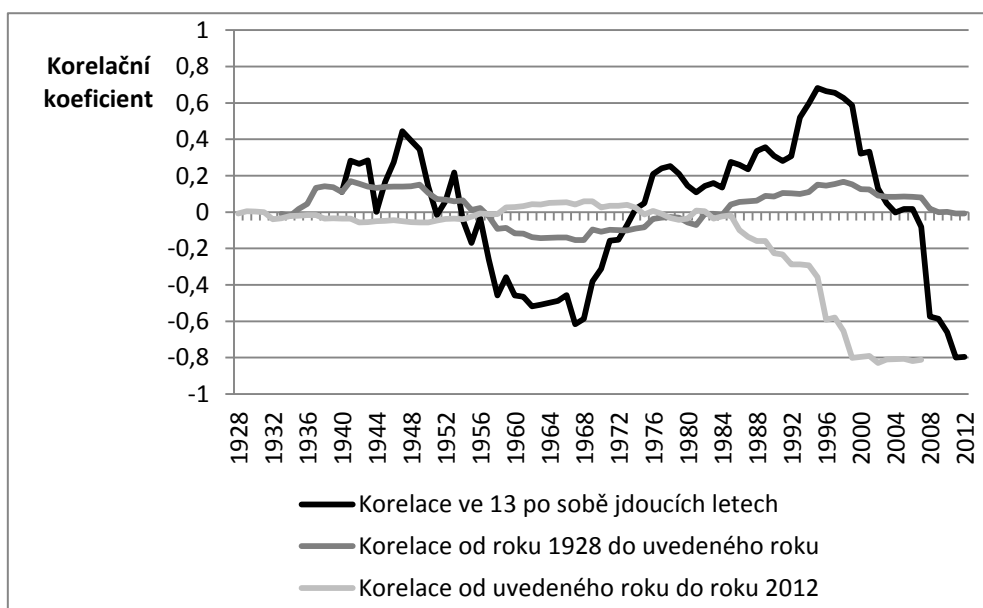
Tab. 2.2 Volatilita a provázanost výnosů akciového indexu a státních cenných papírů v USA v období 1928–2012

Instrument	Volatilita - rozdělení ročních výnosností						Korelace
	Minimum	Dolní kvartil	Medián	Horní kvartil	Maximum	Směrodatná odchylka	Korelace s S&P 500
Akciový index S&P 500	-43,84%	-0,21%	14,22%	25,06%	52,56%	19,89%	1,000
Krátkodobé státní CP	0,03%	1,03%	3,16%	5,26%	14,30%	3,03%	-0,018
Dlouhodobé státní CP	-11,12%	1,29%	3,61%	8,46%	32,81%	7,69%	-0,008

Zdroj dat: Damodaran (2013).

Poznámka: Roční data. *Krátkodobé CP* jsou tříměsíční federální pokladniční poukázky (Treasury Bills), *Dlouhodobé CP* jsou desetileté vládní dluhopisy (Treasury Bonds).

Obr. 2.1 Korelace mezi desetiletými vládními dluhopisy USA a indexem S&P 500



Zdroj dat: Damodaran (2013).

Poznámka: Vždy se jedná o korelace ročních výnosů. *Korelace ve 13 po sobě jdoucích letech* měří korelaci ve třináctiletých obdobích, kdy nejčerstvějším rokem období je rok uvedený na vodorovné ose. *Korelace od roku 1928 do uvedeného roku* měří korelaci v období počínajícím rokem 1928 a končícím rokem uvedeným na vodorovné ose. *Korelace od uvedeného roku do roku 2012* měří korelaci v období počínajícím na vodorovné ose uvedeným rokem a končícím posledním dostupným ročním pozorováním pro rok 2012.

Zbývá prozkoumat, jak si vedou swapy. Kvůli splatnostní porovnatelnosti s desetiletými vládními dluhopisy USA jsou použity desetileté dolarové úrokové swapy. Pro nedostatek starších dat je provedena analýza na ročních datech za období 2000-2012.

Z hlediska Teoretické definice **swapy vykazují rovněž volatilitu výnosností, rozptyl jejich sazeb je však výrazně nižší než u dluhopisů**. Z hlediska CAPM definice opět nejsou sazby dolarových swapů nekorelované s indexem S&P 500, stupeň **korelace je však podstatně nižší než u desetiletého dluhopisu**. Obojí je ukázáno v Tabulce 2.3 a na Obrázku 2.2. Přestože je analýza postavena na malém vzorku dat a bylo by vhodné provést podobný výzkum pro delší období, swapy vyznívají podle obou definic o poznání „bezrizikověji“.

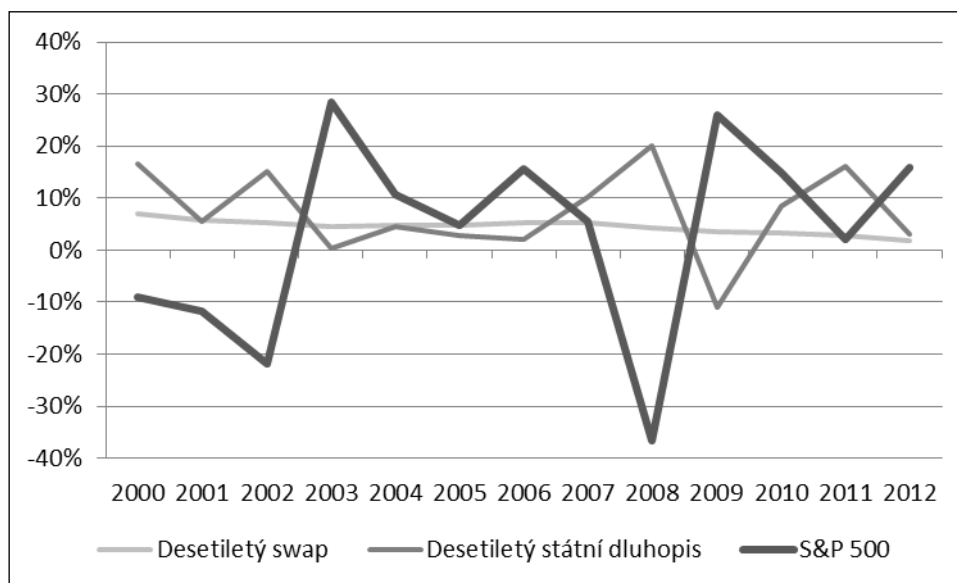
Tab. 2.3 Srovnání úrokových swapů a státních dluhopisů ve volatilitě a korelaci s akciovým indexem v USA

Instrument	Volatilita - rozdělení ročních výnosností						Korelace
	Minimum	Dolní kvartil	Medián	Horní kvartil	Maximum	Směrodatná odchylka	Korelace s S&P 500
10letý dolarový swap	1,88%	3,44%	4,69%	5,24%	6,89%	1,28%	-0,3791
10letý vládní dluhopis USA	-11,12%	2,87%	5,57%	15,12%	20,10%	8,15%	-0,7962

Zdroj dat: Board of Governors (2013), Damodaran (2013).

Poznámka: Roční data z let 2000-2012.

Obr. 2.2 Srovnání ročních výnosů akciového indexu, státních cenných papírů a swapových sazeb v USA



Zdroj dat: Board of Governors (2013), Damodaran (2013).

Jedním z vysvětlení, proč si swapové sazby vedly lépe než dluhopisy, může být fakt, že **swapy nejsou svojí podstatou investiční instrument**, tedy instrument, do kterého by subjekty ukládaly své volné prostředky.²⁷ Swapy naopak slouží k zajištění/spekulaci na pohyb úrokových

²⁷ Při volbě instrumentu pro bezrizikovou míru se nabízí 2 typy instrumentů.

1. **Skutečné investiční aktivum**, vyznačující se nízkým (historickým nebo očekávaným) rizikem. Jedná se o instrument primárně nakupovaný za účelem uložení prostředků. Sem spadají v praxi hojně užívané státní dluhopisy. Dále by sem

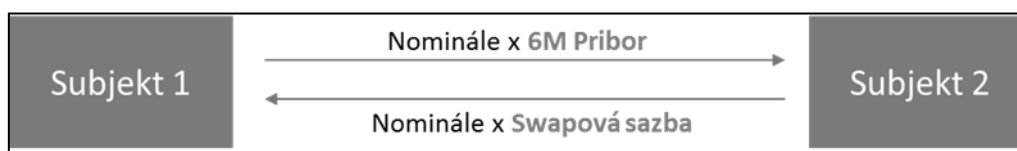
sazeb. Tím jsou do určité míry eliminovány specifické vlivy poptávky a nabídky po investičních instrumentech²⁸. Konkrétně, státní dluhopisy lze běžně užívat jako zástavu pro mezibankovní operace či operace s centrální bankou, což zvyšuje jejich žádanost. Protože u swapů tato možnost chybí, povede to, za jinak stejných podmínek, k vyšším cenám a nižší výnosnosti státních cenných papírů oproti swapovým sazbám.

Pokud je swapový segment dostatečně likvidní (což bude pro český trh diskutováno v části 2.2.4), umožní swapové sazby vhodně extrahovat očekávání o budoucích úrokových sazbách. Oproti subjektivním očekáváním analytiků je tento způsob tržně konformní.

Přestože swapy lépe splnily Teoretickou a CAPM definici než vládní dluhopisy, je rovněž zajímavé srovnat swapy a státní dluhopisy z hlediska kreditního rizika, a tedy míry splnění Praktické definice. Vyšší kreditní riziko swapů proti státním cenným papírům je totiž častým argumentem proti používání swapů.

Při hodnocení kreditního rizika je třeba vyjít z konstrukce swapového kontraktu. Schéma plateb ze swapů je ukázáno v Obrázku 2.3. Jedna strana platí po celou dobu fixní swapovou sazbu (v určité měně), a druhá strana platí aktuální tržní sazbu (v též měně) na mezibankovním trhu, tzv. referenční sazbu.

Obr. 2.3 Schéma plateb vyplývající úrokového swapu



Zdroj: Vlastní zpracování.

Poznámka: Jde o případ swapu, kde je referenční sazbou šestiměsíční (6M) Príbor.

Kreditní riziko, které je přítomné ve swapovém kontraktu, lze rozdělit do následujících dvou kategorií.

- **Kreditní riziko zabudované do referenční sazby.** Referenční sazba odráží rizikovitost příjemců mezibankovních úvěrů, tj. rizikovitost bank. Pokud jsou banky rizikové, mezibankovní úvěry obsahují prémii za kreditní riziko a referenční sazba roste. Tomu musí odpovídat i růst swapové sazby, aby strana platící swapovou sazbu trvale neprodělávala. Dá se předpokládat, že rizikovitost bank je téměř vždy vyšší než rizikovitost vlád. Nicméně, jelikož v referenční sazbě jde o poměrně krátkodobé úvěry (např. se splatností 6

spadaly sazby mezibankovního trhu (právo uložit nebo si půjčit na mezibankovním trhu) a sazby centrální banky (pro ČR například dvoutýdenní reposazba – právo uložit volné zdroje u centrální banky), obojí se ale v praxi téměř nepoužívá.

2. **Úroková sazba,** vyplývající z instrumentů s primárně neinvestičním účelem. Jedná se o instrument používaný zejména k zajištění různých forem tržního (úrokového, měnového) rizika. Patří sem úrokových swapy, úrokové forwardy nebo i měnové forwardy. Metoda založená na měnových forwardech je zmíněna v Damodaran (2008); je však vhodná k užití až jako poslední možnost.

²⁸ Uznáváme, že i úrokový swap lze vidět jako investiční instrument. A to ve spojení s investicí, jejíž pohyblivý výnos investor platí protistraně a výměnou za to dostává swapovou sazbu. Poptávka po takovéto investici by měla vliv na ceny swapů. Zmíněný pohled zároveň teoreticky zdůvodní možnost používání swapů v CAPM modelu pro oceňování investičních aktiv, jehož bezrizikové aktivum je chápáno jako investiční aktivum.

měsíců), je sporné, zda jsou tyto úvěry rizikovější než dlouhodobé státní dluhopisy, zejména pokud se jedná o stát s méně důvěryhodnou vládou.

- **Kreditní riziko samotného swapového kontraktu.** Swapové kontrakty jsou většinou kontrakty mezi subjektem a kótující bankou, kde subjektem je obvykle jiná banka nebo velká firma. Riziko pro kótující banku je, že protistrana nesplní svou část závazku. Riziko pro subjekt je, že svou část závazku nesplní banka. Jelikož se ale platby vzájemně započítávají, ohrožena je pouze současná hodnota diferenciálu mezi aktuálními tržními sazbami a nasmlouvanou swapovou sazbou vynásobenou velikostí jistiny, tudíž částka násobně menší než pokud by se jednalo o dluhopis²⁹. Lze se domnívat, že dopad tohoto rizika do swapových sazeb nebude velký.

Nelze tedy jednoznačně posoudit, zda státní dluhopisy nebo swapy představují vyšší kreditní riziko. Podle Schich (1997) jsou swapy rizikovější, rozdíl ale není nekvantifikován. Empirická evidence v Maříková – Mařík (2012, s. 78, obr. 11) ukazuje, že (Svenssonovou metodou vyrovnané) německé vládní cenné papíry se vyznačují systematicky nižšími sazbami než sazby z eurových swapů, přičemž rozdíl se zmenšuje s růstem splatnosti. Je otázka, jak velkou část tohoto rozdílu lze přisoudit nižšímu kreditnímu riziku dluhopisů a kolik ostatním faktorům.

I když mohou být swapy průměrně rizikovější než státní cenné papíry, velkou výhodou swapů je, že kreditní riziko roste méně s dobou do splatnosti než u státních cenných papírů. Tím lze vysvětlit zmíněné stírání rozdílu mezi EUR swapy a německými vládními cennými papíry s rostoucí splatností.

Závěrem k analýze bezrizikivosti swapů lze říci, že **úrokové swapy vycházejí dokonce příznivěji než státní dluhopisy ve dvou ze tří definic bezrizikivosti.** Vedle statistického závěru pro to existuje i teoretické zdůvodnění.

2.2.3 Dostupnost dat

Moderní přístupy (např. Mařík et al., 2011) staví na jednoletých bezrizikových mírách pro každý rok. Důvodem je, že:

- Diskontní míra je výnosnost alternativní investice, tudíž každý výnosový tok by měl být srovnán s bezrizikovou mírou právě pro tento horizont.
- Pouze pro každý rok diferencované bezrizikové diskontní míry dokáží správně interagovat s rizikovými přírážkami, které se běžně stanovují jako jednoleté.

První důvod nevyžaduje komentář. Druhý důvod si však zaslouhuje následující demonstraci. Mějme podnik generující výnosy na konci dvou roků. Mějme jednoletou bezrizikovou míru S_1 (tj. platnou ode dneška na rok) a dvouletou bezrizikovou míru S_2 (tj. platnou ode dneška na 2 roky). Z toho vyplývá, že bezrizikové míry pro první (tj. ode dneška na rok) a druhý rok (tj. od konce 1. roku do konce 2. roku), označené jako f_1 a f_2 , musí být

²⁹ To lze ukázat například rozdílem mezi jednoletou sazbou Pribor, popisující mezibankovní úvěry, a jednoletým úrokovým swapem. Od listopadu 2004 do června 2013 byl průměrný rozdíl z denních dat 17 bps (bazických bodů, tj. 0,17%) v neprospěch Pribor, tj. sazby Pribor byly vyšší než swapové sazby.

$$f_1 = S_1 \quad \text{a} \quad f_2 = \frac{(1+S_2)^2}{1+S_1} - 1, \quad [1]$$

jinak by nebyl finanční trh v rovnováze a existovala by možnost výnosné bezrizikové arbitráže. Míry typu S budou v souladu s finanční terminologií dále nazývány *spotovými* a míry typu f budou nazývány *forwardovými* či *termínovými*.

K bezrizikové míře je třeba připočíst rizikovou přírážku, která se typicky kalkuluje jako jednoletá. Předpokládejme, že je pro každý rok shodná (tj. $p_1 = p_2 = p$). Výnos v roce 1 bude diskontován výrazem [2].

$$1 + f_1 + p = 1 + S_1 + p. \quad [2]$$

Výnos v roce 2 je diskontován výrazem [3]

$$(1 + S_2 + p)^2 = (1 + S_2)^2 + p^2 + 2p + p \cdot (S_2 + S_2), \quad [3]$$

což se ale obecně nerovná výrazu [4], protože míra S_2 je až na vzácné výjimky odlišná od míry f_2 .

$$(1 + f_1 + p) \cdot (1 + f_2 + p) = (1 + S_2)^2 + p^2 + 2p + p \cdot (S_1 + f_2). \quad [4]$$

Tudíž je zde popřena definice rizikové přírážky coby jednoleté. Dá se navíc předpokládat, že riziková přírážka p v čase konstantní nebude, protože se bude měnit např. se zadlužením (Mařík et al. 2011, s. 133-134) nebo podnikatelským rizikem, které každý rok může kolísat (Maříková – Mařík 2012). Pak je nejpřesnější používat diskontní míry diferencované pro každý rok a řetězit je, jako na levé straně rovnice [4]. Pro tok nastávající v n -tém roce bude diskontní míra

$$(1 + f_1 + p_1) \cdot (1 + f_2 + p_2) \cdot \dots \cdot (1 + f_n + p_n). \quad [5]$$

I Damodaran (2008) uvádí diferencované bezrizikové míry jako preferovaný přístup.³⁰ Diferencované bezrizikové míry ovšem kladou velké nároky na datovou základnu.

Výraz [5] totiž vyžaduje znalost všech jednoletých forwardových bezrizikových sazeb f_i . Ty mohou být zkonstruovány, pokud známe příslušné spotové míry; tj. pro f_i potřebujeme znát S_{i-1} a S_i . Např. pro jednoletou sazbu platnou k počátku roku 3 potřebujeme znát tříletou a čtyřletou sazbu. V případě, že tyto sazby nemáme k dispozici, je třeba se uchýlit k aproximaci pomocí sazeb známých. To lze provést dvěma způsoby, které jsou dále popsány v kapitole 3.

- **Užitím tržních dat** (např. pomocí dvouleté a šestileté) **za předpokladu, že mezi známými splatnostmi se nemění úrokové podmínky.** (Tj. jednoletá forwardová sazba v třetím roce se rovná jednoleté sazbě ve čtvrtém, pátém a

³⁰ Damodaran (2008, s. 8) uvádí, že je vhodné diferencované bezrizikové míry užívat, (1) pokud jsou dlouhodobé bezrizikové sazby nižší než krátkodobé sazby, nebo (2) pokud jsou dlouhodobé sazby vyšší o více než 4% než krátkodobé sazby. Jinak je rozdíl mezi jednotnou a diferencovanou bezrizikovou mírou spíše malý. Toto jsou však pouze orientační pravidla (propočty k nim vedoucí nejsou zmíněny); diferencované míry jsou vždy správnější a skutečný rozdíl mezi dokonalejší a jednodušší metodou bude znám až po provedení ocenění – pak však můžeme přímo použít dokonalejší metodu!

šestém roce). Jedná se o vhodný přístup, když chybí pouze malý počet dat, protože lépe naplňuje podmínku tržnosti.

- **Statistickým proložením všech dostupných tržních dat**, například pomocí Svenssonovy metody (Svensson, 1994). Jedná se o vhodný přístup, když chybí větší úseky dat, protože pak je předpoklad o neměnnosti úrokových podmínek v mezidobí neudržitelný.

Nutnost aproximace má nezávisle na užitém způsobu dva dopady. Zaprvé, s růstem časové vzdálenosti mezi známými sazbami roste aproximací způsobená chyba. Zadruhé, pokud potřebujeme bezrizikovou míru pro období, kde již neexistuje na trhu sazba s delší splatností, což se bude nevyhnutelně stávat u pokračující hodnoty, tuto aproximaci nelze provést.³¹ Závažnost prvního projevu je odvislá od počtu a struktury obchodovaných splatností na trhu. Závažnost druhého projevu závisí na splatnosti nejdéletrvajícího instrumentu daného typu.

Prozkoumejme nyní datovou základnu pro metodu založenou na úrokových swapech. U korunových úrokových swapů zveřejňovaných Patria Finance (2013) je k dispozici 13 splatností³² – 1, 2, 3 až 10 let, a dále 12, 15 a 20 let. Až do horizontu deseti let máme řadu kompletní, pak již musíme některé roky aproximovat, vzhledem ke vzdálenému horizontu však chyba nebude příliš velká. Poslední údaj je pro 20 let, což lze hodnotit jako dostatečné.

Pokud trváme na diferencovaných bezrizikových sazbách, alternativou ke swapům jsou státní dluhopisy. U nich však narážíme na nezanedbatelné problémy. Pokud nemáme přístup do systémů Reuters nebo Bloomberg, můžeme brát hodnoty o výnosnosti dluhopisů například ze systému ARAD (ČNB 2013) a Patria Finance (2013). ARAD není příliš vhodný kvůli malému počtu sledovaných splatností (2, 3, 5, 7, 10, 15 a 30, přičemž pro červen 2013 není dvouletý údaj k dispozici), a zejména proto, že jde vždy o údaje z nejčerstvěji emitovaného dluhopisu s původní dobou splatnosti spadající do dané kategorie (ČNB 2013a). Tudíž výnosnost 30letého dluhopisu může být spočtena z cenného papíru, kterému zbývá do splatnosti například půl roku. Patria udává cenu a výnos do doby splatnosti aktuálně obchodovaných státních dluhopisů (v červnu 2013 je jich 20 – pro každý rok až do 11 let existuje minimálně 1 dluhopis s příslušnou zbytkovou splatností a dále dluhopisy se zbytkovou splatností 15, 23 a 44 let). Není však známo rozložení plateb kuponů³³ a nelze jednoduše provést bootstrapping.³⁴ Odhadce pak musí (1) ztotožnit n -letou sazbu s výnosem do splatnosti n -letého dluhopisu, což hodnotí Mařík et al. (2011, s. 281-282) a Damodaran (2013, s. 6-7) jako nedokonalé, nebo (2) se musí uchýlit k odhadování. Příprava dat pro diferencované bezrizikové sazby je proto při používání českých státních dluhopisů přinejmenším výrazně komplikovanější než u swapů.

Závěrem k podmínce dostupnosti dat pro korunové swapy lze říci, že dle našeho soudu je **k dispozici potřebné množství a struktura swapových splatností**, nutné pro korektní používání metody.

³¹ Tento problém se řeší extrapolací dat nebo předpokladem, že forwardová sazba realizovaná v posledním roce platí až do nekonečna. Jedná se však o kvalitativně striktnější předpoklady než předpoklad neměnnosti sazeb v mezidobí.

³² Doba trvání swapového kontraktu bude pro jednoduchost nazývána splatností. Tento termín je poněkud zavádějící. Platby ze swapů pravidelně nastávají v průběhu kontraktu a na konci kontraktu nenastává vrácení nominále jako u dluhopisu. Tudíž v termínu „splatnosti“ se u swapu nic „nesplácí“.

³³ Údaje o dni splatnosti dluhopisu jsou k dispozici až po rozkliknutí. Údaje o okamžicích výplaty kuponů (tedy jejich frekvence) k dispozici nejsou.

³⁴ Metoda bootstrappingu umožní extrahovat z kurzů dluhopisů spotové sazby. Mechanismus je popsán např. v Mařík et al. (2011, 291-295). Jak si poradit, když se okamžiky výplat kuponů delších dluhopisů neshodují s okamžiky splatnosti kratších dluhopisů, je naznačeno v Schich (1997).

2.2.4 Kvalita dat

Nízká likvidita dlouhodobých swapů může být vnímána jako překážka pro užívání této metody. Že se swapových kontraktů na nejdelší horizonty obchoduje výrazně méně, je nasnadě. Otázkou je, jaký vliv má tento fakt na sazby těchto instrumentů.

Likviditu lze měřit počtem proběhlých obchodů.³⁵ Likviditu lze ale rovněž zkoumat prostřednictvím výsledných kotací bid-ask. Nelikvidita promítnutá do kotací může³⁶ mít na ocenění na rozdíl od malého počtu proběhlých transakcí jako takového přímý vliv, protože dále užitá swapová sazba pro i -tou splatnosti (s_i) je průměrem kotací bid a ask:

$$s_i \equiv \frac{s_{i,BID} + s_{i,ASK}}{2}, \quad [6]$$

a tedy pro bid-ask rozpětí, označené R_i , platí

$$R_i \equiv \frac{s_{i,ASK} - s_{i,BID}}{2} = s_i - s_{i,BID} = s_{i,ASK} - s_i. \quad [7]$$

Likvidita korunových swapových kontraktů bude posouzena na základě následujících 3 ukazatelů.

- **Rozpětí mezi sazbou bid a ask** (tzv. bid-ask spread). Rozpětí je v tomto článku vždy popisováno jako jednostranné, tj. jako polovina rozdílu mezi kotacemi, tedy podle vzorce [7]. Vyšší rozpětí naznačuje méně likvidní trh.³⁷
- **Mezidenní změna bid-ask spreadů**. To je zde definováno jako $|R_{i,t} - R_{i,t-1}|$, kde R_i je spread vypočtený ze vzorce [7] pro den t a $t-1$. Převážnou dobu trvající neměnnost spreadů následovaná občasnými skokovými změnami může naznačovat nižší likviditu. Na druhé straně, každodenní mírné kolísání spreadů je typické pro vysoce likvidní trh.
- **Mezidenní změna průměru kotací** (výnosností). Ta je zde definována jako $|s_{i,t} - s_{i,t-1}|$. Převážnou dobu trvající neměnnost výnosností (Damodaran 2013b, s. 59), následovaná občasnými skokovými změnami může naznačovat nižší likviditu. Na druhé straně, každodenní mírné kolísání výnosností je typické pro vysoce likvidní trh.

Spread. Zejména rozpětí jako takové je dobrým indikátorem likvidity. Eurový swapový trh je výrazně likvidnější než český, což se odráží na jeho přibližně dvakrát až třikrát nižších

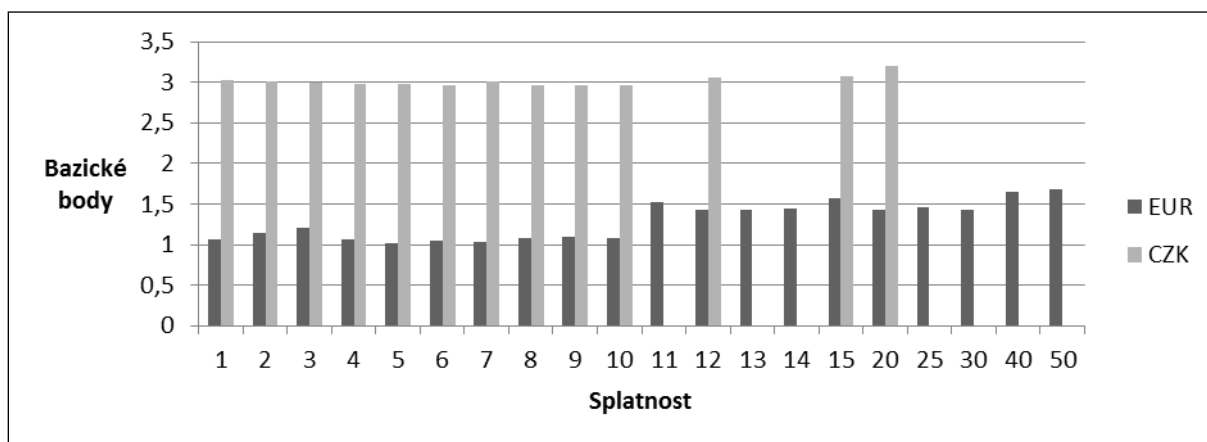
³⁵ Je důležité poznamenat, že zde užitá swapové kotace jsou kotace market-makerů, což jsou velké banky připravené za tyto kotace provádět obchody. Není tedy nutné, aby v daném okamžiku se na trhu vyskytovala protistrana s opačnou potřebou. Tento způsob obchodování tak zvyšuje likviditu – ve smyslu možnost učinit transakci i ve smyslu nižšího kolísání kurzů. Může se ovšem stát, že pokud dlouhodobé kontrakty nejsou obecně poptávány, může market maker kotovat prakticky libovolné sazby.

³⁶ Ale také nemusí, protože si lze představit případy, kdy existují různě velké spready, a přitom výsledný střed kotací je identický.

³⁷ Teoretické vysvětlení, proč se nelikvidní trh vyznačuje vyššími spready, lze nalézt ve Stoll (1978). Na velikost spreadů má rovněž vliv počet market-makerů a konkurence mezi nimi.

spreadech. To je demonstrováno na Obrázku 2.4. Na eurovém trhu platí, že spready s růstem trvání kontraktu rostou.³⁸

Obr. 2.4 Průměrné spready korunových a eurových swapů podle splatností



Zdroj dat: Patria Finance (2013), užívající data z Reuters.

Poznámka: Pro EUR 2084 pozorování mezi dny 14. 6. 2005 a 12. 6. 2013, pro které jsou k dispozici kotace všech splatností. Pro CZK 2289 pozorování v období mezi dny 2. 9. 2004 a 12. 6. 2013, pro které jsou k dispozici kotace všech splatností.

U korunových swapů ale **vztah mezi velikostí spreadu a trváním kontraktu není příliš očividný**. Tabulka 2.4 naznačuje, že za posledních necelých 10 let měly spready všech splatností takřka identické rozdělení, s rozhodující částí spreadů o velikosti 3 bazické body (tj. 6 bazických bodů mezi bid a ask sazbou).

Tab. 2.4 Statistiky rozdělení bid-ask spreadů korunových swapů v letech 2004-2013

Splatnost (roky)	Průměr	Směrodatná odchylka	Minimum	Dolní kvartil	Medián	Horní kvartil	Maximum
1	3,025	0,858	0,5	2,5	3	3	5
2	3,005	0,858	1	2,5	3	3	5
3	2,996	0,866	0,5	2,5	3	3	6
4	2,984	0,883	0,5	2,5	3	3	6
5	2,985	0,848	0,5	2,5	3	3	5,5
6	2,970	0,848	0,5	2,5	3	3	5
7	3,010	0,939	1	2,5	3	3	7
8	2,966	0,911	1	2,5	3	3	18
9	2,958	0,845	0,9	2,5	3	3	5
10	2,962	0,859	0,5	2,5	3	3	5
12	3,065	0,862	1	3	3	3	5

³⁸ To lze ještě lépe dokumentovat tak, že nejčastějším (jednostranným) spreadem pro jednoletý eurový swap je 1 bp, kdežto pro 50letý swap to je 2bps.

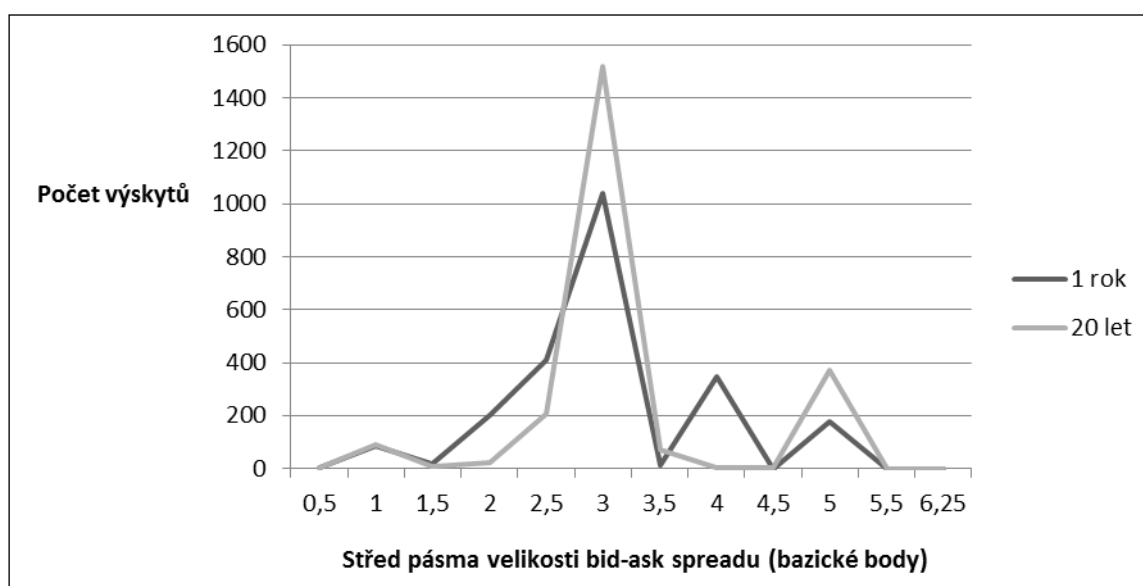
Splatnost (roky)	Průměr	Směrodatná odchylka	Minimum	Dolní kvartil	Medián	Horní kvartil	Maximum
15	3,078	0,845	1	3	3	3	5
20	3,203	0,904	0,5	3	3	3	5

Zdroj dat: Patria Finance (2013).

Poznámka: 2289 denních pozorování v období mezi dny 2. 9. 2004 a 12. 6. 2013, pro která jsou k dispozici kotace všech splatností. Hodnoty jsou v bazických bodech.

Obrázek 2.5 srovnává swapový kontrakt s nejkratší splatností 1 rok s kontraktem na 20 let, který by teoreticky měl být nejméně likvidní. Ukazuje se, že byť dvacetiletý kontrakt má vyšší četnost spreadu o velikosti 5 bps, což naznačuje mírně nižší likviditu, rozdíl v distribucích není nijak dramatický.

Obr. 2.5 Rozdělení bid-ask spreadů na korunové swapy pro nejkratší a nejdelší horizont



Zdroj dat: Patria Finance (2013).

Poznámka: 2289 pozorování v období mezi dny 2. 9. 2004 a 12. 6. 2013, pro která jsou k dispozici kotace všech splatností. Kategorie „0,5“ zahrnuje všechna pozorování s menším spreadem než 0,75 bps a kategorie „6,25“ zahrnuje všechna pozorování s větším spreadem než 5,75 bps.

To potvrzuje i pohled skrze popisné statistiky rozdělení spreadů v Tabulce 2.4. Průměrný spread je nejvyšší u 20letého swapu, kde dochází ke zvýšení spreadu oproti splatnosti 15 let. Kromě tohoto mírného zvýšení se ale **nezdá, že by velikost spreadu vykazovala závislost na délce splatnosti**. Navíc rozdíl mezi minimální (pro splatnost 9 let) a maximální (pro splatnost 20 let) průměrnou velikostí je pouze cca 0,25 bazického bodu. Mediány a horní kvantily jsou identické u všech splatností.

Změny spreadů. Druhým zmíněným způsobem zhodnocení likvidity je sledování mezidenních změn spreadů. Výsledky této analýzy jsou prezentovány v Tabulce 2.5. U všech splatností se ukazuje, že ve většině dní nedošlo k žádné úpravě velikosti spreadu. Přesto se zdá, že průměrná mezidenní odchylka klesá se splatností a nejdelší splatnost je rigidnější než ostatní. Směrodatná odchylka změn je neprůkazná a rozdělení mají velmi podobné kvantily. Jak bylo řečeno, nízká likvidita se může projevat nízkou četností změn, ale velkým kolísáním, pokud takové změny nastanou. Byl proto sledován i počet dní, kdy nedošlo ke změnám spreadů, průměrná velikost nenulových změn a průměrná velikost 100 největších mezidenních změn pro každou splatnost.

Zjištěná větší strnulost delších splatností může naznačovat nižší likviditu, to se ale v žádném případě neodráží ve větším kolísání, pokud takové změny nastanou. Nezdá se tedy, že by nižší počet proběhlých transakcí s delší splatností deformoval kotace.³⁹

Tab. 2.5 Statistiky mezidenních změn bid-ask spreadů korunových swapů (2004–2013)

Splatnost	Dní beze změny	Průměr	Směrodatná odchylka	Průměr ze změn	Průměr 100 největších změn	Největší změna
1	1295	0,443	0,669	1,020	2,300	3
2	1302	0,443	0,671	1,028	2,458	4
3	1365	0,433	0,682	1,074	2,517	4
4	1342	0,442	0,689	1,070	2,523	4
5	1345	0,450	0,701	1,091	2,590	4
6	1352	0,460	0,712	1,125	2,590	3,1
7	1345	0,443	0,684	1,074	2,442	5
8	1344	0,469	0,824	1,137	2,806	15
9	1363	0,447	0,700	1,107	2,538	3,1
10	1352	0,434	0,669	1,060	2,416	3,1
12	1563	0,296	0,565	0,933	2,092	3,1
15	1596	0,301	0,588	0,996	2,086	3,1
20	1779	0,257	0,616	1,157	2,240	2,5

Zdroj dat: Patria Finance (2013).

Poznámka: 2289 denních pozorování kotací v období mezi dny 2. 9. 2004 a 12. 6. 2013, pro která jsou k dispozici kotace všech splatností. Tedy je k dispozici 2288 pozorování o změnách, v drtivé většině se jedná o mezidenní změny. *Průměr* zahrnuje i pozorování, kdy k žádné úpravě spreadu nedošlo. Hodnoty jsou v bazických bodech.

Změny průměru kotací. Posledním zmíněným způsobem měření likvidity je sledování mezidenních změn výnosností. V Tabulce 2.6 jsou udány stejné charakteristiky jako u mezidenních změn spreadů. Z podstaty věci jsou středové kotace více volatilní než velikosti spreadů. Ukazuje se, že kratší kotace jsou spíše strnulější. Kratší kotace sice mají nižší průměrnou velikost změn, ale vyskytují se u nich extrémnější kolísání, měřená vyšší směrodatnou odchylkou, vyšším průměrem z největších 100 změn nebo vyšší maximální velikostí změny. Výjimkou je nejdelší 20letý swap, který je v tomto směru nejkolísavější ze všech. To může být bráno jako dílčí závěr o nižší likviditě tohoto segmentu trhu.⁴⁰

³⁹ Naproti tomu, na trhu eurových swapů tenduje k růstu se splatností jak průměrné kolísání, tak směrodatná odchylka. Zejména je tento trend pozorovatelný pro průměrnou nenulovou změnu a pro průměr 100 největších změn. Výjimku tvoří swapy do 3 let.

⁴⁰ Na trhu eurových swapů všechny charakteristiky uvedené v Tabulce 2.6 tendují k růstu s prodloužováním délky kontraktu. Alternativním vysvětlením ale může být, že kotace na některých horizontech jsou přirozeně volatilnější i bez vlivu likvidity.

Tab. 2.6 Statistiky mezidenních změn průměru kotací korunových swapů (2004–2013)

Splatnost	Počet dní beze změny	Průměr	Směrodatná odchylka	Průměr ze změn	Průměr 100 největších změn	Největší změna
1	334	2,346	3,349	2,748	13,746	40,5
2	331	2,670	3,182	3,121	13,343	47,5
3	294	2,729	3,077	3,131	12,742	46,5
4	283	2,775	3,025	3,167	12,324	44,5
5	282	2,800	2,911	3,193	11,859	42,5
6	239	2,819	2,835	3,148	11,585	39,5
7	258	2,940	4,112	3,314	13,868	106
8	227	2,866	2,823	3,182	11,611	31,5
9	241	2,839	2,788	3,174	11,517	26,5
10	293	2,831	2,814	3,246	11,566	25
12	283	2,871	2,797	3,276	11,492	23,9
15	250	3,109	3,041	3,490	12,583	26
20	273	3,819	4,670	4,336	19,741	58

Zdroj dat: Patria Finance (2013).

Poznámka: 2289 denních pozorování kotací v období mezi dny 2. 9. 2004 a 12. 6. 2013, pro která jsou k dispozici kotace všech splatností. Tedy je k dispozici 2288 změn, v drtivé většině se jedná o mezidenní změny. *Průměr* zahrnuje i pozorování, kdy k žádné změně průměru kotací nedošlo. Hodnoty jsou v bazických bodech.

Shrnutí. Market-makeři při kotaci swapů nespekulují – snaží se nastavit sazby tak, aby vyrovnali nabídku s poptávkou. Pokud by segment byl velmi nelikvidní, pak by museli zvýšit spready, aby nalákali nebo odradili přebytkovou poptávku či nabídku. To se ale nezdá, že by byl případ pro korunové úrokové swapy. **Pouze 20letý kontrakt indikuje dílčí známky nižší likvidity, byť nikterak dramatické.** Provedená analýza naznačuje, že i dlouhodobější swapové kontrakty jsou využitelné pro stanovení bezrizikové míry.

2.2.5 Slučitelnost s ostatními komponentami diskontní míry

Dosud provedená analýza ukazuje, že swapy mohou být vhodným základem pro bezrizikovou míru. Bezriziková míra je však pouze jednou z komponent nákladů vlastního kapitálu. Měla by proto být s ostatními komponentami metodicky slučitelná.

Slučitelnost pochopitelně závisí na způsobu stanovení nákladů vlastního kapitálu. Spíše než na typu metody⁴¹ bude záviset na stupni kontroly oceňovatele nad užitými daty. Pokud oceňovatel

⁴¹ Základní přístupy lze kategorizovat na (1) CAPM a jeho rozšíření či modifikace (tj. modely obsahující rovnici [8], případně mají její pravé straně přičteny další faktory jako model APT), odhadující beta faktor regresně, (2) modely se strukturou CAPM, případně rozšířené či modifikované, které odhadují beta faktor jinak, například systémem srážek a přírážek, nebo jako podíl volatility kurzu akcie a volatility akciového trhu (Damodaran, 2013a, s. 20-21), (3) modely s jinou strukturou než CAPM, např. proxy model (Damodaran 2013b, s. 5) nebo stavebnicová metoda v Mařík et al (2011a, s. 236-251)

sám konstruuje všechny součásti modelu, použije taková data, že problém neslučitelnosti nenastane. Pokud ovšem přejímá již vypočtené součásti, může se stát, že přejaté součásti nebudou se swapovou bezrizikovou mírou v souladu.

Pro tržní ocenění se používají v drtivé většině modely postavené na architektuře CAPM. Proto prozkoumáme slučitelnost u tohoto modelu. CAPM model má tvar popsany rovnicí [8].

$$r_A = r_F + \beta \cdot (r_M - r_F), \quad [8]$$

kde r_A je (očekávaná) výnosnost oceňovaného aktiva, tj. odhad nákladů vlastního kapitálu, r_F (očekávaná) bezriziková výnosnost, β beta faktor označující expozici oceňovaného aktiva k tržnímu riziku, r_M (očekávaná) výnosnost akciového trhu aproximovaného akciovým indexem. Výraz $(r_M - r_F)$ označme jako ekvitní prémii, tj. prémii za riziko celého akciového trhu.

Při oceňování lokálních aktiv se běžně aplikuje beta faktor, ekvitní premie a bezriziková výnosnost z rozvinutého trhu, nejčastěji USA. Následně se kompenzuje odlišná rizikovitost lokálního a rozvinutého trhu (ať již přičtením do rovnice [8], nebo přičtením k ekvitní prémii⁴²) a rozdíl v očekávané inflaci⁴³.

Pokud rovnici [8] inovujeme vložením r_F z korunových swapů, ale dále přejímáme β a premii za ekvitní riziko $(r_M - r_F)$ z rozvinutého trhu, dojde k nekonzistenci⁴⁴. Nabízí se 2 řešení. Použít lokální ekvitní premii nebo upravit ekvitní premii z rozvinutého trhu.

Lokální ekvitní premie. V rovnici [8] by bylo ideální použít všechny vstupy lokální, tedy lokální bezrizikovou míru, lokální akciový index a lokální beta faktor. Lokální bezrizikovou míru známe ze swapů a výnosnost lokálního akciového indexu můžeme vzít jako implikovanou výnosnost (Damodaran, 2013b).⁴⁵ Máme tedy lokální ekvitní premii. Překážkou je však velmi malý počet akcií (a tedy odvětvím a velikostí podobných firem) na lokálním trhu (Damodaran, 2013a). Je

⁴² Člen přičtený k rovnici [8] může být rozdíl sazeb kreditních defaultních swapů (CDS) pro vlády lokální a rozvinuté země, vynásobený poměrem volatilit výnosností akciového trhu lokální země a výnosností státních dluhopisů lokální vlády (Mařík et al. 2011a, s. 221-222). Více o riziku země v Damodaran (2003).

⁴³ Lze učinit dvěma způsoby: korekcí bezrizikové míry nebo korekcí nákladů kapitálu. (1) Korekcí bezrizikové míry: pokud je CAPM celý převzat z rozvinutého trhu, přičtení rozdílu v očekávané inflaci k rovnici [8] se chová jako zvýšení bezrizikové míry. (2) Korekcí nákladů vlastního kapitálu (Damodaran, 2003): celou pravou stranu rovnice [8] vynásobíme faktorem $(1 + \pi_{LOK}) / (1 + \pi_{ROZ})$, kde π_{LOK} je lokální očekávaná inflace a π_{ROZ} očekávaná inflace na rozvinutém trhu. Inflační diferenciál má zde na rozdíl od (1) dopad i do premie za ekvitní riziko.

⁴⁴ Protože se bezriziková míra bude pravděpodobně lišit od bezrizikové míry obsažené v prémii za ekvitní riziko, dojde k paradoxu, kdy akcie s betou rovnou 1 (tj. přesně odpovídající akciovému indexu) bude vykazovat jinou očekávanou výnosnost od amerického trhu.

⁴⁵ Implikovaná ekvitní premie je popsána v Mařík et al. (2011, 321-330). Oproti ekvitní prémii počítané jako rozdíl v průměrných historických výnosnostech akciového indexu a bezrizikového instrumentu má 2 zásadní výhody. Zaprvé, je dopředu hledící. Zadruhé, nepotřebuje historické časové řady, které jsou zejména na rozvíjejících se trzích příliš krátké, aby poskytovaly odhad ekvitní premie s dostatečnou statistickou spolehlivostí (Damodaran, 2013b).

proto nutné použít beta faktor z rozvinutých trhů. Klíčovou otázkou se stává, zda převzatá beta správně interaguje s lokální ekvitní premií.⁴⁶

To závisí na výpočtu beta faktoru. Nejčastěji je beta počítána regresně jako tzv. historická beta, a to regresním odhadem rovnice [9], kde α a β jsou neznámé odhadované parametry (Damodaran, 2013a).⁴⁷

$$r_{A,i} = \alpha + \beta \cdot r_{M,i} + u_i \quad [9]$$

Parametr β z rovnice [9] je odhadem beta faktoru. Regresní rovnice [9] vede ke známému výrazu [10].

$$\beta = \frac{n \cdot \left(\sum_{i=1}^n r_{A,i} \cdot r_{M,i} \right) - \left(\sum_{i=1}^n r_{A,i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n r_{M,i} \right)}{\left(\sum_{i=1}^n r_{M,i}^2 \right) - \left(\sum_{i=1}^n r_{M,i} \right) \cdot \left(\sum_{i=1}^n r_{M,i} \right)} = \frac{\text{cov}(r_A, r_M)}{\text{var}(r_M)} \quad [10]$$

Povšimněme si, že se v rovnicích [9] ani [10] nevyskytuje bezriziková míra (r_F). To znamená, že beta faktor je odhadován bez vztahu k bezrizikové míře⁴⁸; jedná se v tomto případě o vztah akciového indexu a konkrétní akcie. Získaný beta faktor je proto přenositelný do modelů s libovolnou bezrizikovou mírou.⁴⁹

S tímto závěrem v ruce můžeme odhadovat náklady vlastního kapitálu českých podniků s užitím korunových swapů pomocí rovnice [11]

$$r_A(i) = r_F(i) + \beta \cdot (r_M - \bar{r}_F), \quad [11]$$

kde $r_A(i)$ jsou jednoleté náklady vlastního kapitálu pro i -tý rok, $r_F(i)$ je jednoletá forwardová bezriziková sazba z korunových swapů pro i -tý rok, β je beta faktor převzatý z rozvinutého trhu, r_M je výnosnost korunového akciového indexu (PX) a \bar{r}_F je swapová sazba korunového swapu se splatností podobnou odhadu průměrné durace akcií, kterou Damodaran (2008) uvádí

⁴⁶ Hlubší otázkou je, zda beta z jiného trhu je vůbec relevantní pro lokální trh, tedy zda se např. americké podniky chovají z hlediska vztahu k akciovému indexu podobně jako české. Otázka zde nebude řešena, neboť metoda úrokových swapů se v tomto neodchyluje od převažující praxe, která bety z cizího trhu běžně přijímá.

⁴⁷ Dolní index i označuje číslo pozorování; většinou se používá měsíční nebo čtvrtletní období.

⁴⁸ Po přeuspořádání lze ukázat, že v rovnici [9] je bezriziková míra považována za konstantu. Její velikost se dá vypočítat z odhadu parametru α pomocí rovnice $\alpha = (1 - \beta) \cdot r_F$. Například v demonstraci v Damodaran (2013a, s. 13) je její hodnota -1,46%! Takto vypočtené bezrizikové míry se však nikdy dále nepoužívají.

⁴⁹ Záleží však na užití regresní rovnici. V následující regresní rovnici: $r_{A,i} - r_{F,i} = \alpha + \beta \cdot (r_{M,i} - r_{F,i}) + u_i$, by volba bezrizikové míry měla ve většině případů vliv na odhad bety. Vliv by však byl malý, pokud (1) jsou bezrizikové míry dostatečně nekorelované s výnosy posuzovaných akcií a akciovými indexy a dostatečně málo kolísající v čase, nebo pokud (2) premie za ekvitní riziko při užívání swapů a premie za ekvitní riziko při užívání ve stanovení bety použitých bezrizikových instrumentů (což budou pravděpodobně státní dluhopisy) budou přibližně proporcionální. První podmínka je ostatně běžně používána, pokud chceme dané instrumenty nazývat bezrizikovými (viz část 2.2). Tudíž betu můžeme považovat za teoreticky přenositelnou i zde.

jako přibližně 10 let. Ekvitní prémie totiž má odpovídat rizikosti akcií oproti bezrizikové míře, a proto se odhaduje jako nadvýnosnost akciového indexu nad bezrizikovou míru pro stejné splatnosti. Protože instrument s kratší splatností bývá z podstaty věci vnímán jako méně rizikový, nebylo by jinak srovnání korektní.

Ekvitní prémie z rozvinutého trhu. Pokud nevěříme lokální ekvitní prémii, můžeme použít ekvitní prémii z rozvinutého trhu. Pokud ale bezriziková míra v rovnici [8] je ze swapů (korunových), pak bychom potřebovali, aby i ekvitní prémie byla ze swapů (v měně rozvinutého trhu, tedy např. USD) a nikoli dluhopisů, jinak by opět byl výpočet nekonzistentní. Výsledná rovnice bude:

$$r_A(i) = r_F(i) + \beta \cdot (r_{M,ROZ} - \bar{r}_{F,ROZ}), \quad [12]$$

kde $r_A(i)$ jsou jednoleté náklady vlastního kapitálu pro i -tý rok, $r_F(i)$ je jednoletá forwardová bezriziková sazba z korunových swapů pro i -tý rok, β je beta faktor převzatý z rozvinutého trhu, $r_{M,ROZ}$ je výnosnost akciového indexu rozvinutého trhu (např. S&P 500) a $\bar{r}_{F,ROZ}$ je swapová sazba v měně příslušného rozvinutého trhu (zde tedy USD) se splatností podobnou odhadu průměrné durace akcií, kterou Damodaran (2008) uvádí jako přibližně 10 let.

Oproti nejrozšířenější oceňovací praxi ve tvaru

$$r_A = r_{F,ROZ} + \beta \cdot (r_{M,ROZ} - r_{F,ROZ}) + CP_{LOK}, \quad [13]$$

kde $r_{F,ROZ}$ je bezriziková míra z rozvinutého trhu a CP_{LOK} je prémie lokální země, přístup založený na lokální bezrizikové míře a ekvitní prémii z rozvinutého trhu nahrazuje zahraniční bezrizikovou míru ($r_{F,ROZ}$) lokální bezrizikovou mírou (r_F). Tím ovšem eliminuje, nebo alespoň redukuje, potřebu připočítat prémii země.

To proto, že základní prémie země obsahuje dva faktory: (1) přirážku k bezrizikové míře rozvinutého trhu, jehož vláda / makroekonomické prostředí jsou považovány za méně rizikové ve srovnání s vládou / makroekonomickým prostředím lokální země, (2) přirážku k bezrizikové míře za rozdíl v očekávané inflaci mezi lokálním a rozvinutým trhem. Obojí je již obsaženo v lokální bezrizikové míře ze swapů. Proto není potřeba prémii země připočítat, naopak její připočtení by znamenalo započíst stejné riziko dvakrát.

Prémie země může být konstruovaná složitěji, aby byla nejenom zvýšena bezriziková míra, ale odpovídajícím způsobem vzrostla i ekvitní prémie, jako je doporučováno v Damodaran (2013b). Ani v tomto případě nebudou v článku uvedené lokální swapové míry překážkou.⁵⁰

⁵⁰ Je však třeba metody výpočtu prémie země upravit tak, aby reflektovaly skutečnost, že užíváme v rizikové prémii swapy, a dát pozor, aby nedošlo k započtení rizika dvakrát. Například v přístupu, který měří relativní rizikost akcií vůči bezrizikovým instrumentům pomocí směrodatných odchylek výnosů lokálního indexu ($\sigma_{M,LOK}$) a lokálního bezrizikového instrumentu ($\sigma_{RF,LOK}$) a kalkuluje

prémii země v rovnici [13] takto: $CP_{LOK} = \frac{\sigma_{M,LOK}}{\sigma_{RF,LOK}} \cdot (CDS_{LOK} - CDS_{ROZ})$, kde CDS jsou kreditní

defaultní spready obou zemí, je třeba v $\sigma_{RF,LOK}$ použít desetileté swapové sazby namísto obvyklých vládních dluhopisů. Navíc je třeba zohlednit, že lokální bezriziková míra (r_F) již obsahuje přirážku za nebezpečí selhání lokálních subjektů. Proto korektní výsledná rovnice pro očekávanou výnosnost

Z analýzy slučitelnosti s ostatními komponentami diskontní míry proto vyplývá, že **sazby založené na korunových swapech lze použít společně s** běžně používaným regresním odhadem faktoru **beta z rozvinutého trhu**. Metoda bude dobře fungovat i pro ostatní přístupy ke stanovení beta faktoru.⁵¹ Je však nutné zdůraznit, že ekvitní prémie (rozdíl mezi tržním indexem a bezrizikovou sazbou) by měly pocházet buďto (1) z lokálního akciového indexu a z lokální swapové sazby se splatností rovnou průměrné duraci akcií (podle Damodaran (2008, s. 9-10) je kolem 10 let), nebo (2) z akciového indexu rozvinuté země a ze swapové sazby v měně příslušné rozvinuté země, opět se splatností rovnou průměrné duraci akcií.

2.3 Způsob výpočtu

Užití sazeb z úrokových swapů pro stanovení bezrizikové míry je popsáno v Mařík et al. (2011). Problematický moment nastává pro horizonty, pro které není známa swapová sazba. Na tento zádrhel se zde zaměříme. Pro přehlednost však uvedeme celý postup výpočtu.

Spotové výnosové míry (používané v části 2.3) se obecně nerovnají swapovým sazbám. Za dvou mlčky učiněných předpokladů⁵², že:

- swapové kontrakty směřují platby jednou ročně na konci každého roku,
- referenční sazbou je jednoletá mezibankovní sazba,

je tvrzení demonstrováno v Mařík et al. (2011, s. 295-302), byť zejména pro kratší splatnosti není rozdíl příliš velký. Za těchto předpokladů se spotová výnosová křivka, tj. posloupnost úrokových sazeb se splatností 1 až 20 let, spočítá jako:

$$S_1 = s_1. \quad [14]^{53}$$

$$S_i = \sqrt[i]{\frac{1 + s_i}{1 - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{s_j}{(1 + S_j)^j}}} - 1, \text{ pro } i = 2, \dots, n. \quad [15]$$

kde S_i je spotová sazba a s_i swapová sazba se splatností i let.

Postupuje se postupně od kratších splatností k delším. Zádrhel nastává, když chybí pro určitý rok swapová sazba – což u korunových swapů z Patria Finance (2013) vždy nastává pro splatnosti 11, 13, 14, 16, 17, 18 a 19 let. Pak nelze do vzorce [15] dosadit.

lokálního	aktiva	musí	být:
$r_A = r_F + \beta \cdot (r_{M,ROZ} - r_{F,ROZ}) + \frac{\sigma_{M,LOK} - \sigma_{RF,LOK}}{\sigma_{RF,LOK}} \cdot (CDS_{LOK} - CDS_{ROZ}).$			

Přirážka k rovnici [8]

tak bude pouze dodatečná prémie za rozdíl v rizikivosti akciových indexů.

⁵¹ Beta faktory počítané metodou relativní volatility (viz Poznámku 19) budou konzistentní, protože se opět jedná pouze o vztahy mezi konkrétními akciemi a akciovým indexem, nezávislé na bezrizikové míře. Rovněž beta počítaná systémem srážek a přirážek k základní hodnotě 1 je nezávislá na bezrizikové míře, a tedy použitelná s jinou bezrizikovou mírou.

⁵² Ani jeden z předpokladů však v praxi není splněn; typicky swapy směřují úrokové platby v kvartálních intervalech. Pak vztahy [14] a [15] nejsou rovnostmi, ale pouze zjednodušující aproximací.

⁵³ Rovnost je důsledkem obou předpokladů. Takový swap ale postrádá logiku. Pokud by totiž jednoletý swap měnil dnes známou referenční sazbu za dnes známou swapovou sazbu, zjevně by nemělo smysl pro žádnou stranu takový kontrakt uzavírat. Jde tedy o zjednodušující fikci. Lze však místo jednoletého swapu použít roční mezibankovní sazbu (po korekci o kreditní riziko, viz část 2.2.2). Tento postup funguje pro první splatnost i tehdy, pokud by swapy směřovaly platby častěji než s roční frekvencí.

Mařík et al. (2011, s. 300) problém překonává odhadem zbývajících swapových sazeb pomocí regrese, kdy pozorované swapové sazby vysvětluje dobou trvání swapu. To je sice jednoduché a v mnohých případech dostatečné řešení, ale:

- předpokládá, že oceňovatel ví, jaký je teoretický tvar výnosové křivky (tj. vnáší do ocenění subjektivní prvek), a tedy, jakou regresní funkci zvolit.⁵⁴
- Dále se pro konkrétní kombinaci pozorovaných swapových sazeb nemusí nabízet vhodná prokládací funkce.

Řešením druhé námitky by bylo pomocí známých swapových měr pro všechny horizonty odhadnout parametry Svenssonovy funkce (Svensson, 1994). Dosazováním požadovaných horizontů (1, 2 až 20 let) do této funkce bychom získali odhad swapových sazeb pro všechny roky až do 20 let. Tyto odhady⁵⁵ můžeme dosadit do rovnic [14] a [15] a získat požadované spotové míry. Svenssonův postup obecně funguje při prokládání výnosových křivek velmi dobře.⁵⁶ První námitka deficitu tržnosti ale zůstává.

Pro trh s dostatečným počtem a strukturou swapových splatností, jako je korunový swapový trh, je korektnějším řešením postup nastíněný v části 2.3. Je založen na předpokladu neměnných podmínek v období mezi nejbližšími známými swapovými sazbami. Roční forwardová sazba platná v tomto mezidobí se vypočte pomocí vzorce [16].

$$(1 + S_i)^i \cdot (1 + f)^k = \frac{1 + S_{i+k}}{1 - \sum_{j=1}^i \frac{S_{i+k}}{(1 + S_j)^j} - \sum_{j=1}^{j=k-1} \frac{S_{i+k}}{(1 + S_i)^i \cdot (1 + f)^j}}, \quad [16]$$

kde i je splatnost poslední známé swapové sazby, k je vzdálenost mezi nejbližšími sousedními známými swapovými sazbami, tj. $i+k$ je splatnost následující známé swapové sazby. Pokud např. chybí swapová sazba pro 11 rok, $i=10$ a $k=2$.

Následně je třeba spočítat spotovou sazbu pro neznámé roky pomocí vzorce [17]:

$$S_l = \sqrt[l]{(1 + S_i)^i \cdot (1 + f)^{l-i}} - 1, \quad [17]$$

pro $l = i + 1, \dots, i + k$, tj. pro jedenáctý rok $l = 11$ a pro dvanáctý rok $l = 12$.

Tím máme k dispozici spotové sazby pro každý rok až do splatnosti nejdélehodnějšího swapu. Protože diferencované bezrizikové míry fungují dle rovnice [5], je ještě nutné převést spotové míry na jednoleté forwardové. To se učiní pomocí vzorců [18] a [19].

⁵⁴ Lze namítat, že existují objektivní statistická kritéria vhodnosti regresní funkce. Bohužel (1) takovýchto kritérií existuje více (např. korigovaný R2, F-statistika, Akaiikovo kritérium a Swarzovo kritérium) a všechny jsou uživatelsky málo přístupné (pro jejich popis např. Verbeek, 2011). 2) Takováto regrese má navíc malý počet pozorování na hledaném horizontu, tudíž kritéria budou mít tendenci selhávat. Už to, že autoři v Mařík et al (2011) při proložení vynechali swapovou sazbu na horizont 1 rok, zjevně kvůli zlepšené kvalitě odhadu, svědčí o tom, že nalézt „vhodné proložení“ není vždy jednoduché a volba je nevyhnutelně subjektivní.

⁵⁵ Případně můžeme použít publikované sazby a pomoci si odhady pouze pro splatnosti, pro které nejsou publikované sazby k dispozici.

⁵⁶ Jedná se o standardní metodu konstrukce výnosové křivky, používanou po celém světě. V Německu je používána i pro potřeby stanovení bezrizikové míry v oceňování. Metoda je nastíněna v Mařík et al (2011).

$$f_1 = S_1 \quad [18]$$

$$f_i = \frac{(1 + S_i)^i}{(1 + S_{i-1})^{i-1}} - 1. \quad [19]$$

Zopakujme, že pokud je jednoletá prémie za riziko, získaná například jako beta faktor krát ekviventní prémie, pro všechny horizonty rovna p , pak náklady vlastního kapitálu pro diskontování výnosového toku nastalého v n -tém roce se spočítají jako [20].

$$(1 + f_1 + p) \cdot (1 + f_2 + p) \cdot \dots \cdot (1 + f_n + p) \quad [20]$$

Pokud je podnik financován výhradně vlastním kapitálem, nebo diskontujeme výnosové toky určené vlastníkům, pak je výraz [20] již příslušnou diskontní mírou. V opačném případě je náklad vlastního kapitálu vyčíslený rovnicí [20] pouze jedním vstupem ve výpočtu váženého průměru nákladů na kapitál (WACC).

Výše uvedený postup je vždy funkční. Rovnice [16] však vyžaduje numerické řešení.⁵⁷ Převedení korunových swapových sazeb na spotové úrokové míry je proto tak výpočetně náročné, že pokud oceňovatel nemá připraven počítačový skript, nebude tomuto postupu nakloněn. Pokud ale skript má, je **tento postup nejen teoreticky správnější, ale i časově úspornější než** pokaždé **provádět regresní odhad** po vzoru Mařík et al. (2011). Vzhledem k rozšířenosti počítačových programů pro oceňování podniků se není důvod implementaci navrženého řešení vyhýbat.

2.4 Závěr

Užívání sazeb z korunových úrokových swapů patří mezi inovativní přístupy k bezrizikovým mírám. Článek analýzou pěti podmínek prověřil korektnost tohoto přístupu při aplikaci na český trh. Dospěl následujícím závěrům.

- Užití dat z úrokových swapů zcela naplňuje požadavek tržnosti, tudíž metoda je vhodná pro tržní ocenění.
- Úrokové swapy jsou dostatečně bezrizikové. Ačkoli zde provedená analýza není rozsahem vyčerpávající a provedení studií za delší období nebo neamerický trh by bylo žádoucí, ve dvou klíčových definicích bezrizikovosti swapy vyznívají dokonce jako méně rizikové než převážně užívané státní dluhopisy.
- Existuje na trhu dostatek korunových swapových splatností, aby swapové kontrakty mohly být základem pro diferencovanou bezrizikovou míru. Diferencovaná bezriziková míra je českou (Mařík et al., 2011) i zahraniční (Damodaran, 2008) literaturou považována za správnější přístup, ve srovnání s běžnou praxí jedné bezrizikové míry aplikované na všechny horizonty.
- S výjimkou mírných problémů u dvacetiletého korunového swapu se nezdá, že by menší počet swapových obchodů s delšími splatnostmi měl výraznější dopad do swapových sazeb.
- Korunové swapové sazby lze použít k odhadu nákladů vlastního kapitálu v rámci všech hlavních metod, včetně CAPM modelu s beta faktorem

⁵⁷ Teoreticky je rovnice vždy analyticky řešitelná, pokud k není větší než 4, což ale nevyhnutelně nastane pro výpočet spotových sazeb mezi 15. a 20. rokem, užíváme-li data Patria Finance (2013).

převzatým z rozvinutého trhu. Ekvitní prémie však toto musí reflektovat. Existují dvě řešení. Prvním je užít výnosnost českého akciového indexu oproti dlouhodobějším (cca 10 let) korunovým swapovým sazbám. V tomto případě je již obsažena prémie za riziko země a inflační diferenciál. Druhým je užít výnosnost akciového indexu rozvinuté země oproti dlouhodobějším (cca 10 let) swapovým sazbám v méně rozvinuté země. V tomto případě je základní prémie za riziko země a inflační diferenciál již aplikována, a pokud oceňovatel hodlá použít pokročilejší přístup k těmto premiím, musí dát pozor na vyhnutí se dvojímu započtení této prémie.

Článek rovněž zpřesnil postup k dopočítání spotových a termínových měr ze swapových sazeb v případě, že nejsou k dispozici swapové kontrakty pro všechny potřebné splatnosti. Aplikace tohoto postupu sice vyžaduje použití výpočetní techniky, s ní je však dostatečně jednoduchá na praktické užití.

Inovativní metoda úrokových swapových sazeb se tak zdá být respektabilní alternativou k běžně užívané praxi odvozování bezrizikové výnosnosti ze státních dluhopisů.

Literatura

- [1] A. T. Kearney (2011): *Where Have All the 10-Year Strategies Gone?* Executive Agenda, s. 17-25.
- [2] Board of Governors of the Federal Reserve System (2013). *Selected Interest Rates (Daily) - H.15: Historical Data*. [cit. 30.12.2013]. Dostupné na <http://www.federalreserve.gov/releases/h15/data.htm#fn13>.
- [3] Česká národní banka (2013). *ARAD – Systém časových řad: Výnosy státních dluhopisů*. [cit. 15.7.2013]. Dostupné na http://www.cnb.cz/cnb/STAT.ARADY_PKG.STROM_SESTAVY?p_strid=EBA&p_sestuid=&p_lang=CS.
- [4] Česká národní banka (2013a). *Výnosy státních dluhopisů: Metodický list*. [cit. dne 24.7.2013]. Dostupné na http://www.cnb.cz/docs/ARADY/MET_LIST/cmír_cs.pdf.
- [5] Damodaran, A. (2013). *Annual Returns on Stock, T.Bonds and T.Bills: 1928 - Current*. [cit. 15.7.2013]. Dostupné na http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/datafile/histretSP.html.
- [6] Damodaran, A. (2013a). *Estimating Risk Parameters*. [cit. 14.12.2013]. Dostupné na <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/beta.pdf>.
- [7] Damodaran, A. (2013b). *Equity Risk Premiums (ERP): Determinants, Estimation and Implications – The 2013 Edition*. [cit. 11.1.2014]. Dostupné na http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2238064.
- [8] Damodaran, A. (2008). *What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block*. Stern School of Business, New York University. [cit. 7.7.2013] Dostupné na: <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf>.
- [9] Damodaran, A. (2003). *Measuring Company Exposure to Country Risk: Theory and Practice*. [cit. 11.1.2014]. Dostupné na <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/CountryRisk.pdf>.

- [10] Maříková, P. – Mařík, M. (2012). *Odvozování bezrizikové výnosové míry z tržních dat pomocí Svenssonovy metody*. *Odhadce a oceňování majetku* 4/2012, s. 67-79.
- [11] Mařík, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: Hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.
- [12] Mařík, M. et al. (2011a). *Metody oceňování podniku: Proces ocenění, základní metody a postupy*. 3. upravené a rozšířené vydání. Praha: Ekopress.
- [13] Musílek, P. (1999). *Finanční trhy a investiční bankovnictví*. 1. vydání. Praha: ETC.
- [14] Patria Finance (2013). *Měny a sazby – Databáze finančních údajů*. [cit. 15.6.2013]. Dostupné na <http://www.patria.cz>.
- [15] Stoll, H. R. (1978). *The Supply of Dealer Services in Securities Markets*. *The Journal of Finance* 33, 4, 1133-1151.
- [16] Svensson, L. E. O. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. Seminar Paper No. 579. Stockholm: Institute for International Economic Studies, University of Stockholm.
- [17] Verbeek, M. (2012). *A Guide to Modern Macroeconomics*. 4th Edition. Chichester: John Wiley & Sons.

Kapitola 3

Bezriziková míra ze státních dluhopisů: přednosti a úskalí Svenssonovy metody

Abstrakt

Při stanovení bezrizikové míry se nejčastěji vychází ze státních dluhopisů. Pokročilé přístupy k diskontní míře ale vyžadují, aby byla diferencována pro jednotlivé roky. Protože většina státních dluhopisů není splatných jednorázově, je k výpočtu bezrizikových měř zcela nezbytné učinit předpoklad o chování výnosových měř. Jedním z takovýchto předpokladů je Svenssonova funkce. V Německu je v oceňování používána jako standardní postup a v poslední době je propagována i pro český trh. Článek popisuje postup, jak výpočet diferencované bezrizikové míry probíhá, a empiricky demonstruje, že Svenssonem navržené proložení je i pro situaci českého trhu ve většině případů mimořádně přesné. Dále je ukázáno, že z důvodu odlišných výnosů českých a německých státních dluhopisů, zapříčiněných odlišnými podmínkami na trhu a odlišným vnímáním rizikivosti dluhopisů, není možné automaticky přejímat německé výsledky. Stojí proto za úvahu vyvinout model na českých datech.

3.1 Úvod

Určování bezrizikových výnosových měř dostává v odborné literatuře nemalý prostor (Damodaran 2008, Dvořák 2014, Mařík et al. 2011, Maříková – Mařík 2012). Tradiční metoda použití výnosu do doby splatnosti dlouhodobého vládního dluhopisu (ke dni ocenění)⁵⁸ jako bezrizikové míry pro všechny budoucí výnosové toky z oceňovaného aktiva se dostává do stále větší defenzivy. Je totiž vhodné, aby každý výnosový tok byl porovnán s výnosností alternativní investice se *stejnou dobou splatnosti*. Například dividenda nastávající za 2 roky by měla být porovnána s instrumentem přinášejícím výnos za 2 roky. Tím pádem potřebujeme nikoli jednu bezrizikovou míru, nýbrž celou sérii bezrizikových měř, které budou přiřazovány jednotlivým výnosovým tokům podle jejich splatnosti.

Jednou z možností je místo jediného dluhopisu využít sérii dluhopisů dané entity, lišící se pouze splatností. Například výnosy do doby splatnosti všech amerických dluhopisů, které jsou aktuálně obchodovány. Drtivá většina dluhopisů je ovšem kupónová, tj. periodicky vyplácí kupón a ve splatnosti ještě jmenovitou hodnotu. Pak není zcela korektní použít výnos do doby splatnosti

⁵⁸ Tento postup ale přesto můžeme hodnotit jako výrazně lepší oproti v praxi zřejmě převažujícímu používání *historického průměru* výnosností dluhopisů. O tom, jak jsou údaje z let např. 1928-2014 relevantní pro ocenění k 1.1.2014, nechť si udělá čtenář představu sám.

např. 3letého dluhopisu k diskontování výnosového toku nastávajícího za 3 roky, protože dluhopis na rozdíl od výnosového toku vyplácí kupóny koncem prvního a druhého roku (Mařík et al 2011, s. 284-289): jedná se tak o z časového hlediska odlišné investice.

Řešení spočívá v rozdělení všech na trhu obchodovaných dluhopisů na jednotlivé platby kupónů a jmenovité hodnoty pomocí metody zvané bootstrapping (Mařík et al. 2011, s. 291-295). Ta umožní stanovit výnosovou míru pro splatnost odpovídající každé z těchto plateb.

Leč postup funguje pouze, pokud pro každý termín v budoucnu, kdy dojde k platbě kupónu či jmenovité hodnoty, existuje (alespoň jeden) dluhopis, který v příslušném okamžiku terminuje. Protože dluhopisů se obchoduje omezený počet, je skoro jisté, že tato podmínka nebude splněna pro jiné než učebnicové příklady.

Abychom pak dokázali pomocí na trhu obchodovaných dluhopisů sestavit korektní výnosnost pro každou splatnost (dále budeme tuto výnosnost nazývat *spotovou mírou*), je nezbytné přijmout **předpoklad o chování úrokových měr**. Přijetí takového předpokladu je tedy jedinou možností, jak dospět k diferencovaným bezrizikovým mírám ze státních dluhopisů!

V tomto článku bude tímto předpokladem Svenssonova funkce. Funkce byla vyvinuta ke studiu úrokových měr pro měnovou politiku centrálních bank. Pro oceňovací účely je doporučována v Německu (IDW 2008). Metoda je rovněž popularizována v Maříková – Mařík (2012), kteří naznačují možnost používat postup i pro český trh.

Pro praktické uživatele postup přináší potřebné bezrizikové míry pro libovolný horizont. Postup ovšem může působit dojmem mysteriózní černé skříňky. V tomto článku bude proto metoda blíže popsána a ukážeme její koncepční přednosti a nedostatky. Posoudíme možnost přejímat parametry modelu vyvinuté na německých datech pro české prostředí a budeme diskutovat schopnost Svenssonovy funkce vhodně prokládat česká bezriziková data.

3.2 Dvojití použití Svenssonovy funkce⁵⁹

Svenssonova funkce slouží k prokládání dat. Je názorné rozlišit dvě využití takového prokládání. Jednodušší situace nastává v případě, že známe data, která chceme proložit. Komplikovanějším případem je situace, data k prokládání nemáme k dispozici a naopak je pomocí Svenssonovy funkce potřebujeme nejprve zkonstruovat.

3.2.1 Prokládání známých dat

V jednodušším z obou situací máme k dispozici sérii datových bodů: řekněme, že body představují spotové míry (označované jako $S(m_i)$) pro příslušné horizonty splatností (označované jako m_i). Formálně řečeno, spotové míry jsou takové výnosnosti, které za m let zúročí dnešní jistinu P_0 na hodnotu P_1 , tj.

$$P_1 = P_0 \cdot (1 + S(m))^m \quad [1]$$

V případě oceňování by se $S(m)$ použila pro diskontování výnosového toku nastávajícího za m let. Zádrhelem je, že známe $S(m)$ pouze pro některá konkrétní m_i a nikoli pro všechna možná.

⁵⁹ Abychom zdůraznili, že Svenssonem (1994) navržený postup je pouze jednou z možných variant obecného přístupu k utváření výnosové křivky ze státních dluhopisů, budeme dále mluvit o Svenssonově funkci a nikoli Svenssonově metodě.

Naším cílem je proto vybudovat předpis, který dá hodnotu $S(m)$ pro libovolnou splatnost m . Ilustrováno Obr. 3.1, chceme z 13 izolovaných černých bodů $[m_i, S(m_i)]$ vytvořit souvislou křivku, abychom měli spotovou míru i pro 16,5 či 25 let.

Nabízí se proložit známé míry spojitou křivkou tak, aby pro každou splatnost existovala výsledná míra. Můžeme použít například lineární křivku (zde s optimálními parametry 0,255 % pro horizontální posun a 0,0934 % pro sklon), ale je jasné, že lineární proložení není příliš dobré. Dalo by se experimentovat s různými prokládacími funkcemi a zkoumat, která danou kombinaci bodů proloží co nejlépe.⁶⁰ Jednodušším řešením by ale bylo používat jeden typ funkce, který funguje velmi dobře v široké škále situací. Svensson (1994) pro tyto případy navrhuje funkci v obecném tvaru [2]⁶¹.

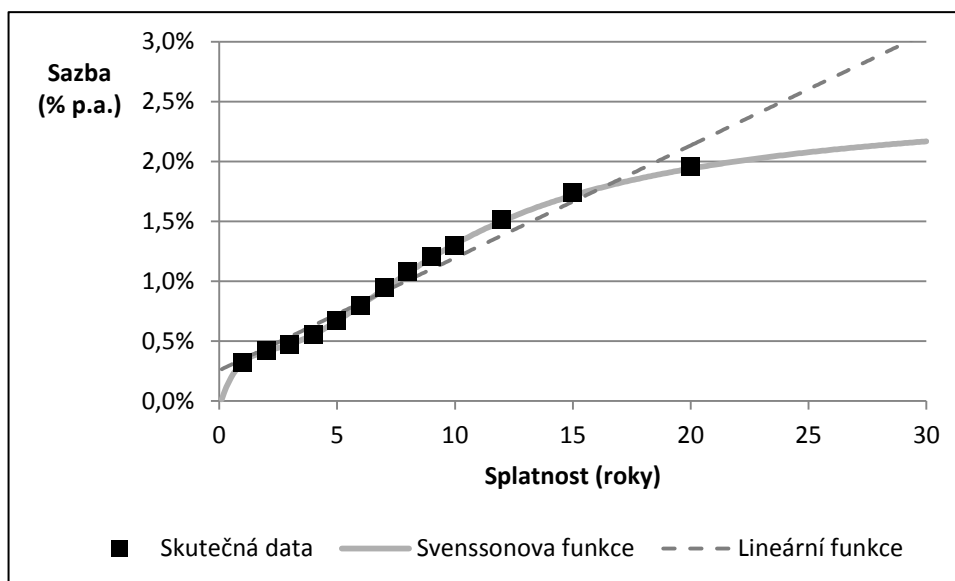
$$\begin{aligned} \tilde{S}(m) = \beta_0 + \beta_1 \frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} + \beta_2 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right)}{\frac{m}{\tau_1}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_1}\right) \right] + \\ + \beta_3 \left[\frac{1 - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right)}{\frac{m}{\tau_2}} - \exp\left(-\frac{m}{\tau_2}\right) \right] \end{aligned} \quad [2]$$

kde spotová míra $\tilde{S}(m)$ pro horizont m let je stanovena pomocí 6 parametrů: $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ a τ_1, τ_2 . Interpretace parametrů je uvedena v Tab. 3.1.

⁶⁰ „Nejvhodněji“ ale neznamená, že by nutně musela přesně procházet všemi body. To není obtížné zařídit; stačilo by použít prokládací funkci, co má dostatečný počet parametrů (např. polynom dostatečně vysokého stupně). Daní za to by ale bylo podivné chování prokládací funkce (různé hrby) mimo tyto body. Proto se klade požadavek, aby se prokládací funkce nejen jednotlivým bodům příliš nevzdalovala, ale aby zároveň byla i dostatečně hladká. K tomu existují i numerická kritéria (viz např. Greene, 2012, s. 82-84).

⁶¹ Svensson (1994) stavěl na starší metodě Nelson – Siegel (1987). Jeho vylepšení spočívá v zahrnutí posledního členu, tedy přidání dalších 2 parametrů, které mají přispívat k lepšímu proložení křivky. Arnold – Lahmann – Schwetzler (2011) ukazují, že rozdíl v přesnosti může být značný, zejména na horizontech delších než 1 rok, což je pro oceňovatele podniků nejdůležitější. Studie Schich (1997) i Svensson (1994) rozdíl neidentifikují až tak výrazný, byť Svenssonova funkce vychází vždy lépe. Na českých datech za necelých 10 posledních let, užitých v kapitole 3.5, je Svenssonova funkce v proložení v průměru přibližně 3x přesnější.

Obr. 3.1 Proložení dat funkcemi



Zdroj dat: Patria (2014), korunové swapové sazby z 23.7.2014.

Parametry se ekonometricky odhadují pomocí dat, která máme k dispozici. V Obr. 3.1 tedy pomocí 13 známých spotových měr. Optimální parametry jsou voleny tak, aby součet druhých mocnin odchylek známých spotových měr od jejich funkcí vyrovnaných hodnot, tj. výraz

$$\sum_{i=1}^n (s(m_i) - \tilde{S}(m_i))^2, \quad [3]$$

byl co nejmenší⁶². Jsou-li vstupní data ve tvaru desetinných čísel, pak optimální hodnoty parametrů pro případ z Obr. 3.1 jsou uvedeny v Tab.3.2.

Tab. 3.1 Interpretace parametrů Svenssonovy funkce

Parametr	Interpretace
β_0	Asymptotická hodnota spotové míry pro nekonečný horizont ($\tilde{S}(\infty) = \beta_0$), tj. ultradlouhá spotová míra
β_1	Rozdíl mezi asymptotickou hodnotou spotové míry pro nekonečný horizont a spotovou mírou pro horizont blížící se nule ($\tilde{S}(\infty) - S(0^+) = -\beta_1$), tj. sklon spotové výnosové křivky
β_2	Intenzita ohnutí křivky kolem splatnosti τ_1 (v absolutní hodnotě vyšší číslo značí výraznější prohnutí, kladné číslo znamená prohnutí směrem vzhůru, záporné prohnutí směrem dolů)
β_3	Intenzita ohnutí křivky kolem splatnosti τ_2 (v absolutní hodnotě vyšší číslo značí výraznější prohnutí, kladné číslo znamená prohnutí směrem

⁶² Metoda se nazývá nelineární metodou nejmenších čtverců. Existují ovšem i další odhadovací procedury (Svensson 1994, Verbeek 2011) a jejich modifikace, například vážit odchylky na různých splatnostních segmentech různě. Je třeba zdůraznit, že každá metoda odhadu bude produkovat mírně odlišné hodnoty parametrů a nelze obecně říci, která odhadovací metoda je nejlepší.

	vzhůru, záporné prohnutí směrem dolů)
τ_1	Jedno místo prohnutí křivky (třetí člen rovnice [2] má nejvyšší výchylku pro $m \approx 1,79 \cdot \tau_1$, což lze vnímat jako střed prohnutí ⁶³)
τ_2	Druhé místo prohnutí křivky (poslední člen rovnice [2] má nejvyšší výchylku pro $m \approx 1,79 \cdot \tau_2$, což lze vnímat jako střed prohnutí), obě prohnutí jsou na sobě nezávislá

Zdroj: Autor.

Vložení číselných hodnot těchto 6 parametrů do rovnice [2] máme k dispozici funkční předpis, do kterého dosazením libovolného horizontu m přímo získáme spotovou míru pro požadovanou splatnost.⁶⁴ Tvar tohoto předpisu je ukázán v Obr. 5.1. Je vidět, že Svenssonova funkce vyrovnala body v našem příkladu velmi přesně a mnohem lépe než funkce lineární.

Tab. 3.2 Interpretace parametrů Svenssonovy funkce

Parametr	β_0	β_1	β_2	β_3	τ_1	τ_2
Optimální hodnota	2,62	-2,67	1375,05	-1378,10	1,6462	1,6492

Zdroj: Autor.

Výše uvedený případ, kdy známe některé spotové míry, a chceme vypočítat spotové míry pro zbylé horizonty, je spíše hypotetický.⁶⁵ Daleko častějším případem by mohlo být užití uvedeného postupu tak, že bychom jako zdrojová data používali nikoli spotové míry, ale

- **výnosy do doby splatnosti státních dluhopisů** (např. ty z Obr. 3.2), kde m_i by byly jejich splatnosti (nebo případně jejich durace),
- na trhu známé swapové sazby,

a výsledná funkce $\tilde{S}(m)$ by reprezentovala výnosy do doby splatnosti či swapové sazby s libovolným horizontem. Jejich účel by pak byl následující.

- **Funkcí získané výnosy do doby splatnosti státních dluhopisů** by byly použity jako bezriziková míra pro příslušný horizont. Toto řešení není samozřejmě zcela precizní (viz kapitolu 3.1), protože výnos do doby splatnosti kupónového dluhopisu není spotovou mírou. Řešení však alespoň poskytuje možnost diskontovat každý výnosový tok z oceňovaného aktiva výnosem do splatnosti dluhopisu se stejnou splatností (nebo durací), i když takový dluhopis na trhu není obchodován.

⁶³ Ze vztahu [2] vyplývá, že třetí a čtvrtý člen jsou pro nulovou a nekonečnou splatnost nulové, a mezi těmito hodnotami je umístěn vždy jeden hrb. Jeho umístění je charakterizováno parametrem τ_1 , resp. τ_2 a jeho amplituda parametrem β_3 , resp. β_4 .

⁶⁴ V závislosti na tom, jak byly parametry v rovnici [2] stanoveny, jsou výsledky buďto v % p.a. nebo ve formě desetinných čísel. Převod mezi oběma formami rovnice je snadný: má-li např. rovnice produkovat desetinná čísla místo procent, je třeba vydělit všechny parametry β stem.

⁶⁵ Tato situace by mohla nastat například tehdy, pokud bychom získali spotové míry z bezkupónových dluhopisů.

- **Funkcí získané swapové sazby** by s určitou nepřesností mohly být použity jako bezriziková míra pro příslušný horizont. Případně by se z nich dala extrahovat série swapových sazeb pro např. 1, 2, 3 až 20letou splatnost a následně dopočítat spotové míry podle Mařík et al (2011, s. 295-302)⁶⁶. V obou případech je však alespoň pro český trh jednoznačně lepší použít výpočetní postup uvedený v Dvořák (2014).

Na závěr uvedme, že Svenssonův model je zvyklý pracovat se spojitým úročením. To znamená, že

- při **zadávaní vstupních dat** se obvykle místo úrokové míry s ročním úročením i do vstupních dat zadá míra se spojitým úročením $\ln(1+i)$, například místo 0,32% by se zadala míra $\ln(1,0032) = 0,3195\%$, a následně
- **výsledná míra** $\tilde{S}(m)$ se pak převede zpět na míru s ročním úročením pomocí vztahu $e^{\tilde{S}(m)}$, tj. např. $\tilde{S}(1) = 0,3202\%$ by se převedlo na $e^{\tilde{S}(1)} = e^{0,003202} = 0,3207\%$.

Na výsledek má ale transformace většinou zcela zanedbatelný vliv a není nutné ji provádět.⁶⁷ Může však být zdrojem interpretačních omylů (leč kvantitativně malých) v momentu, kdy celý odhad provádí přednastavený skript.⁶⁸

3.2.2 Konstrukce dat

V minulé kapitole představené vyrovnávání známých dat Svenssonovou funkcí bylo spíše ilustrativním úvodem do problematiky. V reálu totiž oceňovatelé užívající státní dluhopisy nemají k dispozici již připravené spotové míry⁶⁹, ale pouze údaje o dluhopisech v následující struktuře:

- cena dluhopisu (obvykle čistá, tedy po odečtení alikvótního úrokového výnosu),
- kupónová sazba,
- datum splatnosti,
- frekvence výplaty kupónu.

Tyto informace postačují k vytvoření výplatního kalendáře pro všechny dluhopisy. Je třeba říci, že ne vždy jsou potřebné údaje k dispozici v dané struktuře vždy a jednoduše, jak se lze přesvědčit na Obr. 3.2.

Abychom převedli údaje o kupónových dluhopisech na spotové míry, nabízí se bootstrapping – rozparcelování dluhopisů do jednotlivých plateb. Podmínka bootstrappingu, aby ke každému

⁶⁶ Autoři zde používají k dopočtu swapových sazeb pro chybějící splatnosti swapů proložení polynomem. Použít místo polynomu neznámého řádu Svenssonovu funkci by vedlo k zpřehlednění odhadovací procedury a výraznému zvýšení přesnosti odhadu.

⁶⁷ Např. proložení z Obr. 3.1 je bez transformace.

⁶⁸ Například v programu MATLAB reportuje zabudovaná procedura *IRFunctionCurve.FitSvensson* spotové míry ve spojitém úročení; je tedy nutné je převést zpět na standardní roční úročení, nebo používat spojitě úročení i při diskontování výnosových toků.

⁶⁹ Opět zdůrazněme, že pokud by dluhopisy byly bezkupónové, jejich výnos do splatnosti by byl identický spotovým mírám pro danou splatnost. Bohužel se ale státní bezkupónové dluhopisy s delší splatností takřka nevyskytují.

okamžiku, kdy z některého dluhopisu je vyplácen kupón, existoval dluhopis, který je v daném okamžiku splacen, takže vždy nebude splněna. To je i případ dat o českých státních dluhopisech z 19.7.2014 (Obr. 3.2). Důsledkem toho bootstrapping povede k soustavě 17 rovnic (máme 17 dluhopisů s fixním úročením) s výrazně vyšším počtem neznámých (spotové míry pro každý z termínů výplat kupónů).

To lze demonstrovat na následujícím příkladu. Pro úsporu místa použijeme pouze první 3 dluhopisy s fixním úročením z Obr. 3.2. Jmenovitá hodnota každého z nich je 10 000 Kč. Předpokládejme, že den ocenění je 19.7.2014.

Obr. 3.2 Příklad tabulky kótací českých státních dluhopisů (19.7.2014)

Název	Měna	Cena		Y-T-M		Mod. Durace	AUV(ks)
		Nákup	Prodej	Nákup	Prodej		
ST_DLUHOP_3.80/15	CZK	102,600	102,700	0,139	0,003	0,711	109,78
ST_DLUHOP_3.40/15	CZK	103,600	103,800	0,123	-0,053	1,068	306,00
ST_DLUHOP_VAR/15	EUR	101,000	102,000	0,521	-0,292	0,203	4,31
ST_DLUHOP_6.95/16	CZK	110,100	110,400	0,210	0,027	1,442	345,57
ST_DLUHOP_0.50/16	CZK	100,400	100,700	0,300	0,151	2,003	-0,42
ST_DLUHOP_VAR/16	CZK	100,350	100,750	0,269	0,094	0,261	10,88
ST_DLUHOP_4.00/17	CZK	109,950	110,350	0,308	0,170	2,604	115,56
ST_DLUHOP_VAR/17	CZK	103,250	103,650	0,198	0,069	0,506	0,71
ST_DLUHOP_0.85/18	CZK	101,350	101,750	0,475	0,366	3,594	30,27
ST_DLUHOP_4.60/18	CZK	116,600	117,200	0,467	0,332	3,829	-29,39
ST_DLUHOP_5.00/19	CZK	120,500	121,100	0,576	0,462	4,306	144,44
ST_DLUHOP_1.50/19	CZK	104,250	104,850	0,675	0,562	5,050	110,83
ST_DLUHOP_3.75/20	CZK	117,100	117,700	0,873	0,782	5,487	326,04
ST_DLUHOP_VAR/20	CZK	98,800	99,400	0,308	0,213	0,381	1,53
ST_DLUHOP_3.85/21	CZK	119,200	119,800	1,058	0,979	6,318	316,56
ST_DLUHOP_4.70/22	CZK	126,450	127,050	1,257	1,189	6,875	408,64
ST_DLUHOP_VAR/23	CZK	106,500	107,100	0,423	0,357	0,742	32,67
ST_DLUHOP_5.70/24	CZK	138,600	139,200	1,457	1,404	8,087	95,00
ST_DLUHOP_2.40/25	CZK	106,950	107,550	1,708	1,651	9,898	85,48
ST_DLUHOP_VAR/27	CZK	98,250	98,850	0,454	0,408	0,325	6,33
ST_DLUHOP_2.50/28	CZK	104,300	104,900	2,143	2,094	11,839	229,17
ST_DLUHOP_4.20/36	CZK	122,750	124,750	2,814	2,709	15,411	269,50
ST_DLUHOP_4.85/57	CZK	127,000	131,000	3,608	3,458	20,964	321,99

Zdroj: Patria (2014a)

Poznámka: *Cena dluhopisu* je v procentech z nominální hodnoty po odečtení alikvótního úrokového výnosu (AÚV). *Kupónová sazba* je uvedena ve sloupci Název před lomítkem (v procentech), je-li uvedeno VAR, jedná se o proměnlivé úročení a tyto dluhopisy dále nepoužíváme, stejně jako eurové dluhopisy. *Rok splatnosti* je uveden ve sloupci Název po lomítku, den splatnosti uveden až po prokliku. *Frekvence výplaty* je u všech dluhopisů s výjimkou proměnlivě úročených jednou ročně, informace rovněž uvedena až po prokliku.

Tab. 3.3 Údaje o vybraných dluhopisech pro bootstrapping

	Cena včetně AÚV (Kč) ⁷⁰	Kupónová platba (Kč) ⁷¹	Datum výplat kupónů před splatností	Datum splatnosti (roky)
--	------------------------------------	------------------------------------	-------------------------------------	-------------------------

⁷⁰ Vypočtena jako nominální hodnota krát průměr z ceny nákup a prodej (ceny v Obr. 3.2 jsou uvedeny v procentech z nominále) a k výsledku je připočten alikvótní úrokový výnos (tj. velikost kupónu vynásobená poměrem uplynulého času od poslední výplaty kupónu vůči celému období mezi výplatami kupónu).

⁷¹ Vypočtena jako nominální hodnota vynásobená kupónovou sazbou – číslem před lomítkem v prvním sloupci Obr. 3.2 (údaj je v procentech).

			(roky)	
ST. DLUHOP. 3,80/15	10 367,6	380	-	11.4.2015 (0,73)
ST. DLUHOP. 3,40/15	10 669,2	340	1.9.2014 (0,12)	1.9.2015 (1,12)
ST. DLUHOP. 6,95/16	11 358,6	695	26.1.2015 (0,52)	26.1.2016 (1,52)

Zdroj dat: Patria (2014a).

Bootstrapping povede k následujícím rovnicím (viz Mařík et al., 2011, s. 291-295):

$$10367,6 = \frac{380 + 10000}{[1 + S(0,73)]^{0,73}}, \quad [4]$$

$$10669,2 = \frac{340}{[1 + S(0,12)]^{0,12}} + \frac{340 + 10000}{[1 + S(1,12)]^{1,12}}, \quad [5]$$

$$11358,6 = \frac{695}{[1 + S(0,52)]^{0,52}} + \frac{695 + 10000}{[1 + S(1,52)]^{1,52}}, \quad [6]$$

kde neznámými jsou spotové míry $S(0,12)$, $S(0,52)$, $S(0,73)$, $S(1,12)$, $S(1,52)$. Z této soustavy lze vypočítat pouze $S(0,73)$, na 4 další proměnné máme pouze 2 zbývající rovnice. Tím pádem soustava nemá pro tyto spotové míry jednoznačné řešení. Protože pro každý termín výplat kupónu neexistuje dluhopis, který v daném momentu terminuje, nejsme schopni získat spotovou míru z instrumentů, kterým zbývá do splatnosti více než 1 kupón. Přidání dalších dluhopisů z Obr. 3.2 problém nevyřeší: měli bychom sice více rovnic, ale rovněž více okamžiků výplat kupónů, tedy více neznámých.

Jak z problému ven? Nabízí se možnost vyjít z předpokladu, že spotové míry $S(m)$ nejsou izolované body, ale leží na **určitém způsobem charakterizované obecné křivce**. Tento předpoklad umožní převést úlohu z hledání řešení soustavy rovnic na hledání optimálních hodnot parametrů obecné křivky, což je problém, se kterým si statistické metody dokáží poradit.

Jako zmíněnou obecnou křivku můžeme volit ledacos, například lineární funkci nebo polynom. Jako v minulé kapitole ovšem zvolíme Svenssonovu funkci [2].

Způsob výpočtu ovšem není zdaleka jednoduchý. Sestává ze dvou propojených kroků: odhadování Svenssonových parametrů a testování, jak z nich vyplývající spotové míry odpovídají známým cenám a výnosům obchodovaných dluhopisů. Konkrétní postup podle Schich (1997) používaný Deutsche Bundesbank je následující⁷². Snažíme se minimalizovat rozdíly mezi pozorovanými výnosy a předpovězenými výnosy⁷³ dluhopisů, tj. výraz [7]

⁷² Nejedná se ovšem o jediný možný způsob odhadování; viz Svensson (1994) a Hladíková – Radová (2012).

⁷³ Schich (1997) doporučuje tento postup oproti postupu, který minimalizuje rozdíly tržních a ze spotových měř vyplývajících cen dluhopisů (tj. rozdíly mezi tržní cenou P_i a výrazem na pravé straně rovnice [9]).

$$\sum_{i=1}^n (y_i - \hat{y}_i)^2, \quad [7]$$

kde i je označení dluhopisu (z celkových n , které máme k dispozici). y_i je jeho *skutečný* výnos do doby splatnosti, tedy číslo, které je řešením rovnice [8]

$$P_i = \frac{c_i \cdot N_i}{(1 + y_i)^{t_{i,1}}} + \frac{c_i \cdot N_i}{(1 + y_i)^{t_{i,2}}} + \dots + \frac{c_i \cdot N_i + N_i}{(1 + y_i)^{t_{i,k_i}}}, \quad [8]$$

kde P_i je tržní cena dluhopisu (včetně alikvótního úrokového výnosu), N_i jeho hodnota, c_i kupónová sazba a t časová vzdálenost okamžiků výplat kupónů ode dneška. y_i jsou známa pro všechny obchodované dluhopisy⁷⁴.

Oproti tomu \hat{y}_i je *modelem odhadnutý* výnos do doby splatnosti i -tého dluhopisu. Odhad je takové číslo \hat{y}_i , které řeší rovnici

$$\begin{aligned} & \frac{c_i \cdot N_i}{(1 + \hat{y}_i)^{t_{i,1}}} + \frac{c_i \cdot N_i}{(1 + \hat{y}_i)^{t_{i,2}}} + \dots + \frac{c_i \cdot N_i + N_i}{(1 + \hat{y}_i)^{t_{i,k_i}}} = \\ & = \frac{c_i \cdot N_i}{(1 + \tilde{S}(t_{i,1}))^{t_{i,1}}} + \frac{c_i \cdot N_i}{(1 + \tilde{S}(t_{i,2}))^{t_{i,2}}} + \dots + \frac{c_i \cdot N_i + N_i}{(1 + \tilde{S}(t_{i,k_i}))^{t_{i,k_i}}} \end{aligned} \quad [9]$$

kde každé $\tilde{S}(t_{i,l})$, které představuje spotovou míru se splatností příslušného kupónu $t_{i,l}$, odpovídá předpisu Svenssonovy funkce podle rovnice [2]. 6 parametrů rovnice [2] je přitom jedinými neznámými celého výpočtu.

Poté, co je těchto 6 parametrů (tj. $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$ a τ_1, τ_2) nastaveno tak, že mezi jejich všemi možnými hodnotami minimalizují výraz [7], získáme předpis pro spotovou míru pro libovolný horizont. Tím máme hotovo: do předpisu můžeme dosadit libovolný splatnostní horizont, který v oceňování potřebujeme a obdržíme příslušnou bezrizikovou míru.⁷⁵

Máme-li 6 a více tržně obchodovaných dluhopisů, uvedený postup funguje vždy. Netřeba ale dodávat, že výpočetní postup je mimořádně složitý a nelze jej provádět bez pokročilého programového vybavení.⁷⁶ To je dle mého názoru největší překážkou širšího rozšíření Svenssonova postupu v oceňování.

Závěrem opět uveďme, že se vstupní data běžně transformují na spojitě úročení a výstupní data zpět na roční úročení, jak bylo zmíněno v kapitole 3.2.1.

⁷⁴ Výnosy do doby splatnosti jsou velmi často explicitně uváděny v kurzovních lístcích, jak se lze přesvědčit ze sloupce Y-T-M v Obr. 3.2.

⁷⁵ V kapitole 3.2.1 jsme v 1. kroku získali z tržních dat spotové míry pro vybrané horizonty (byť tuto část za nás již udělal někdo jiný) a ve 2. kroku jsme tyto spotové míry proložili, abychom získali spotové míry pro obecný horizont. V kapitole 3.2.2 máme celý výpočet proveden v jednom kroku.

⁷⁶ Například v programu MATLAB existuje předdefinovaná procedura (*IRFunctionCurve.FitSvensson*), do které se dosadí současný okamžik, tržní kurzy obchodovaných dluhopisů, jejich data splatnosti, kupónové sazby a frekvence výplat a procedura přinese 6 odhadovaných Svenssonových parametrů.

3.2.3 Prokládání funkcí a tržní ocenění

Poté, co jsme představili fungování svenssonovského prokládání, je vhodné diskutovat, zda je podobný metodologický postup slučitelný s tržním oceněním. Tržní ocenění totiž předpokládá, že budou co nejvíce používána data pocházející přímo z trhu bez vnášení subjektivního názoru oceňovatele. Cílem tržního ocenění je posoudit, jak by se na oceňovaný instrument díval trh, byli by tržně obchodován, a nikoli říkat trhu, jak má na samotné tržně obchodované instrumenty nahlížet.⁷⁷ Otázka, jak se zachovat v momentu, kdy jsou tržní sazby nepřiměřené ve vztahu k ekonomickým fundamentům, je velmi relevantní v současné době, charakterizované z dlouhodobého pohledu možná až neudržitelně nízkými úrokovými sazbami. Diskuze této otázky přesahuje náplň článku a nemusí vést k jednoznačným závěrům ohledně toho, za jakých podmínek je vhodné se od tržních dat odchýlit. Proto zde od tohoto aspektu odhlédneme a budeme diskutovat Svenssonův přístup pohledem výše zmíněné striktní definice tržního ocenění.

Striktně vzato, postup prokládání funkce nevyužívá tržní data v maximální možné míře. V kapitole 3.2.1 bylo ukázáno, že Svenssonova funkce pozorovanými spotovými měrami neprochází. V kapitole 3.2.2 bylo cílem minimalizovat rozdíl mezi skutečným výnosem do splatnosti dluhopisů a výnosem do splatnosti dluhopisů v případě používání výsledných spotových měř (výraz [7]). Minimalizace ovšem neznamená nulovost a odchylky budou nutně nastávat.

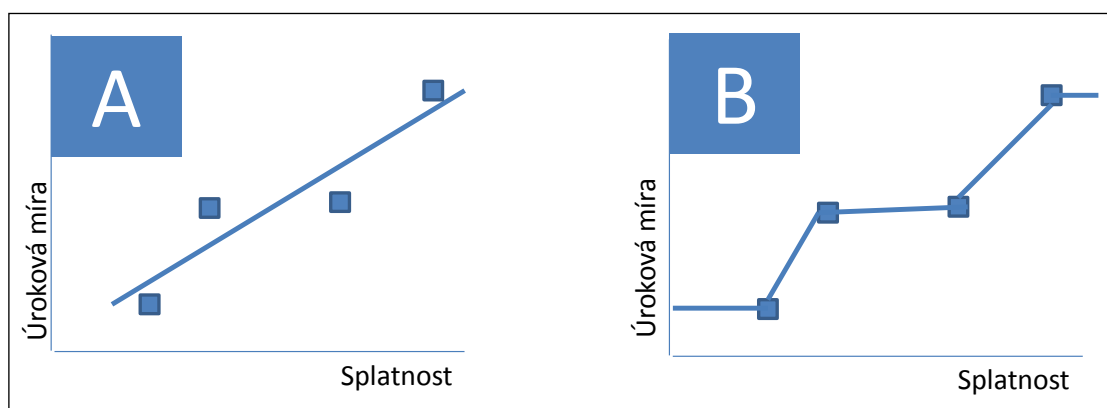
Názorně ukázáno v Obr. 3.3, existují koncepčně 2 způsoby tvorby výnosových křivek, a sice

- **Metoda založená na proložení dat** (panel A Obr. 3.3) ve smyslu například regresní analýzy), kdy předpokládáme, že každé pozorování je zatíženo náhodnou chybou, tudíž proložením dostaneme „správné“ hodnoty.
- **Metoda založená na spojování** (interpolování, panel B Obr. 3.3) dat, kdy získané datové body bereme jako správné, a cílem je odhadnout hodnoty „v mezidobí“ či před prvním a za posledním časovým pozorováním. Nejjednodušším způsobem je pak spojení sousedících bodů lineární křivkou; lze ovšem přijít i s důmyslnějšími spojnicemi.⁷⁸

⁷⁷ Požadavek se v anglickém názvosloví nazývá požadavkem *tržní neutrality*. Například, oceňujeme-li zlaté hodinky a podobné se na trhu prodávají za 20 000, jejich tržní cena je 20 000 bez ohledu na to, zda si myslíme, že trh se zlatými hodinkami je v současné době nadhodnocený či podhodnocený. Otázkou ovšem je, co dělat v okamžiku, kdy tržní ocenění povede ke zcela zjevně pochybné hodnotě, např. v situaci cenové bubliny. Požadavek držet se za každých okolností tržních cen tak může být mnohými vnímán jako extrémní.

⁷⁸ V angličtině se tento přístup nazývá „arbitrage-free“, tedy vylučujícím arbitráž na základě diskrepance mezi tržními a modelem predikovanými hodnotami (Dobiáš 2008).

Obr. 3.3 Rozdíl mezi proložením a spojováním dat



Zdroj: Autor

Jako zcela konformní s tržním oceněním lze dle mého názoru považovat pouze přístup u panelu B. Přístup z panelu A filozoficky tenduje spíše k hledání vnitřní hodnoty („intrinsic value“), kdy je snaha eliminovat z ocenění přechodné vlivy a získat „správnou“ hodnotu, ke které bude tržní hodnota směřovat ve střednědobém horizontu (ASA 2009, s. 29). Rozdíl mezi „vnitřní hodnotou“ a „tržní hodnotou“ přitom nemusí být malý, navíc představy různých analytiků ohledně správné „vnitřní hodnoty“ se mohou diametrálně lišit.

Svenssonovské prokládání je jasně příkladem prokládání dat z panelu A⁷⁹. Postupy z minulé kapitoly se tak striktně řečeno hodí spíše pro výpočet vnitřní hodnoty. To deklaruje i Schich (1997, s. 3), který tvrdí, že „výsledky [svenssonovského] odhadu úrokových měr jsou relativně nezávislé na jednotlivých pozorováních.“

Přes tento filozofický nesoulad lze doporučit postup i pro tržní ocenění, pokud se ukáže, že rozdíly mezi skutečností a Svenssonovým proložením jsou poměrně nevýznamné.⁸⁰ To bude předmětem zkoumání v kapitole 3.5.

Pokud by se ukázalo, že Svenssonova funkce není při prokládání příliš úspěšná, stálo by za to se poohlédnout po jiné odhadní funkci, než je rovnice [2]. Svensson totiž není zdaleka jediným možným způsobem prokládání křivek a lze přijít i s přístupem fungujícím na principu interpolace (tj. panel B Obr. 3.3).⁸¹

3.3 Přejímání německých dat

Jak bylo ukázáno, provedení výpočtů pro Svenssonovo proložení není jednoduché. V Německu mají ovšem oceňovatelé situaci ulehčenou. Německá centrální banka (Deutsche Bundesbank) totiž denně odhaduje výnosovou křivku spočtenou z německých státních dluhopisů postupem z části 3.2.2 a výsledky dává k dispozici jak v podobě výsledných spotových měr (Deutsche

⁷⁹ A od proložení např. lineární či polynomiální funkcí se liší pouze výrazně vyšší dokonalostí proložení, nikoli koncepčně.

⁸⁰ V takovém případě by dokonce šlo odchylky Svenssonova proložení od skutečnosti považovat za korekci náhodných vlivů nevyhnutelně spojených s technikou obchodování dluhopisů, v důsledku kterého je tržní výnosová křivka poněkud kostrbatá, jak by bylo vidět po propojení bodů například v Obr. 3.4.

⁸¹ Z tohoto důvodu doporučuji u převodu swapových sazeb na spotové míry, u nichž je situace podstatně jednodušší než u dluhopisů, nepoužívat Svenssonovo prokládání, ale používat postup uvedený v Dvořák (2014). Ten je (1) zcela slučitelný s tržním oceňováním, (2) výpočetně daleko jednodušší a (3) srozumitelnější.

Bundesbank 2014a), tak ve formě Svenssonových parametrů (Deutsche Bundesbank 2014b). Pro německého oceňovatele je tím pádem používání metody pro výpočet spotových měr snadné.

Otázkou ovšem je, jak postupovat pro český trh, pro který takovýto „servis“ k dispozici není. Nejjednodušším se jeví převzít německé míry. Tuto cestu implicitně doporučuje Institut oceňování majetku VŠE⁸², který sám publikuje forwardové míry pro nejčastější splatnosti, vypočtené na základě parametrů od Bundesbank. Přejímání německých dat může mít dvojitý důvod.

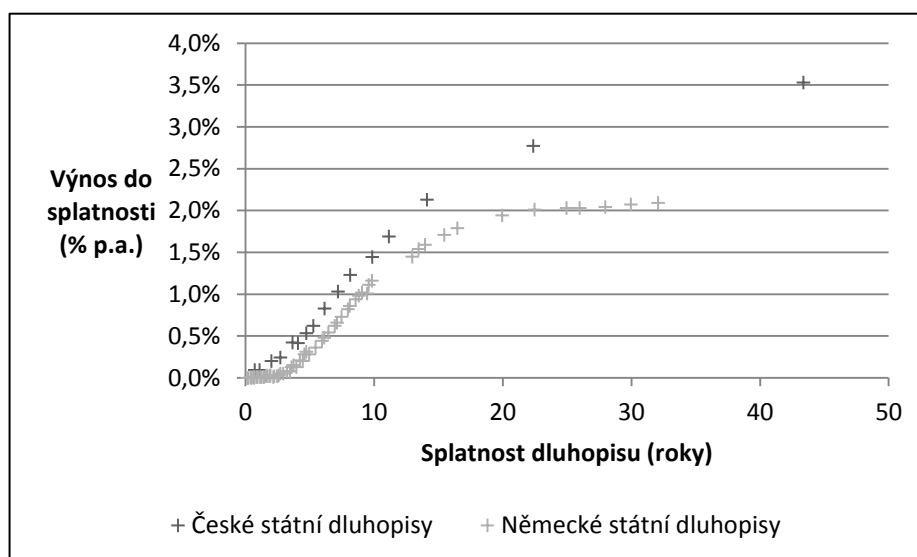
- **Plánovité přejímání německé bezrizikové míry**, protože v CAPM modelu hodláme používat i další komponenty modelu (beta faktor a ekvitní prémii) z německého trhu.⁸³
- **Náhradní postup**, kdy používáme německá data k bezrizikové míře proto, že pro český trh svenssonovské (ani jiné) spotové míry z dluhopisů neexistují.

Posouzení přejímání zahraničních dat pro českou diskontní míru přesahuje záměr tohoto textu a necháme jej stranou.⁸⁴ Posoudíme ale smysluplnost náhradního postupu.

Již bylo řečeno a v kapitole 3.5 se dále ukáže, že výsledné spotové míry vzniklé Svenssonovým proložením jsou velmi silně odvislé od užitých zdrojových dat. Proto je užití modelu vyvinutého na německých datech pro český trh oprávněné pouze tedy, pokud se výnosové podmínky na českém a německém trhu příliš neliší. Tato podmínka bohužel v praxi není zdaleka splněna.

Například, srovnáme-li výnosy do splatnosti německých a českých státních dluhopisů pro 18.7.2014, výnosnost českých dluhopisů je pro všechny horizonty vyšší (Obr. 3.4).

Obr. 3.4 Srovnání výnosů do doby splatnosti českých a německých státních dluhopisů (18.7.2014)



⁸² IOM VŠE (2013).

⁸³ Důvodem pro to může být nemožnost tyto komponenty brát s českého trhu, kde se obchoduje velmi omezený počet akciových titulů. Proto nelze smysluplně počítat beta faktor a prémii za tržní riziko (Dvořák, 2014a).

⁸⁴ Osobně se přikláním k použití lokální bezrizikové míry a přejímání pouze beta faktoru a korigované prémii za ekvitní riziko.

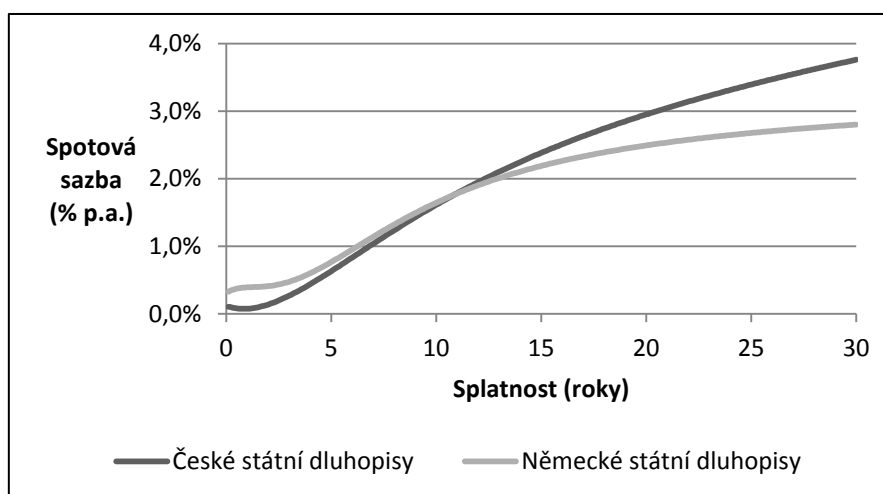
Zdroj dat: Patria (2014a), Deutsche Bundesbank (2014).

Pokud údaje o těchto dluhopisech použijeme k odhadu spotových měr pomocí Svenssonovy funkce, získáme rovněž odlišné spotové míry, přičemž rozdíl mezi výnosovými měrami není zanedbatelný (Obr. 3.5).

Důvod pro tuto odlišnost je dvojitý.

- Odlišná **vnímaná rizikovitost vlád**. Měřeno hodnocením ratingových agentur (ČNB 2013, Standard&Poor's 2013), trhem vnímanou pravděpodobností nesplácení státních dluhopisů i cenou „pojištění se“ proti tomuto riziku, vychází německé vládní dluhopisy jako výrazně bezpečnější investice (Obr. 3.6). Investoři do německých státních dluhopisů se proto spokojí s nižší výnosností než investoři do českých.
- Odlišná **očekávání o budoucích úrokových sazbách**. Protože v ČR a Německu se používá odlišná měna, mohou být očekávání o budoucích úrokových sazbách mírně odlišné: to souvisí např. s politikou centrálních bank, ale i dalšími faktory. Porovnáme-li swapové sazby na koruny a eura (Tab. 3.4), ukazuje se, že obvykle nebývá očekáván shodný vývoj na obou trzích (swapová sazba totiž do určité míry reprezentuje odhad trhu o průměrné úrokové sazbě na mezibankovním trhu za dobu trvání kontraktu).⁸⁵

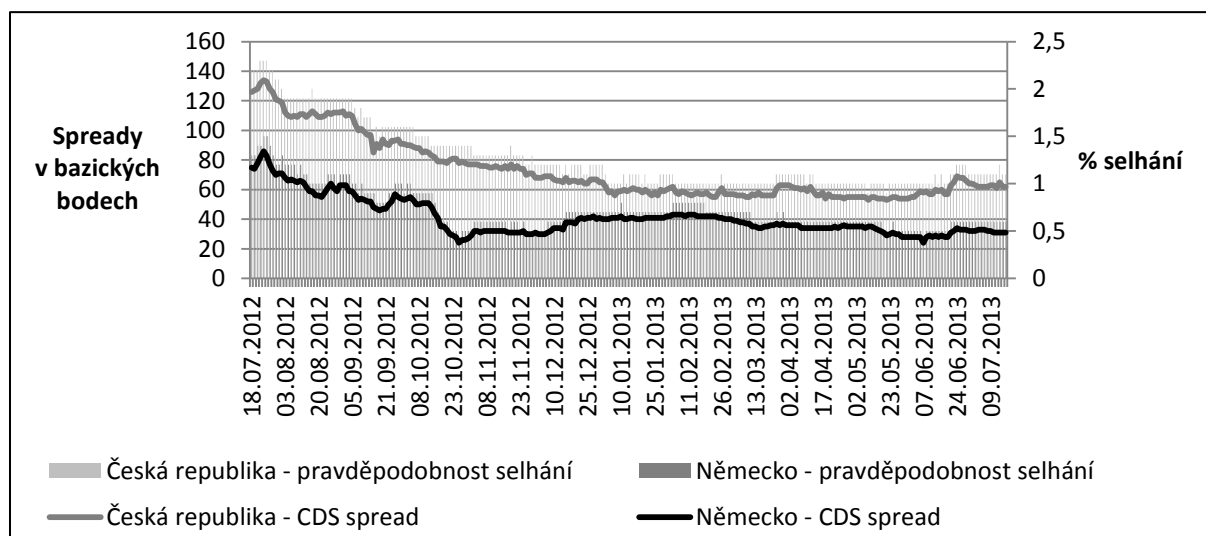
Obr. 3.5 Srovnání spotových měr pro český a německý trh získaných pomocí Svenssonovy funkce (18.7.2014)



Zdroj dat: Patria (2014a), Deutsche Bundesbank (2014).

⁸⁵ Swapové sazby jsou výrazně méně ovlivněny kreditním rizikem než dluhopisy, protože se v nich obchodují pouze úrokové platby a nikoli samotné nominále (Dvořák 2014, Kladívko 2010).

Obr. 3.6 CDS spready a z nich vyplývající pravděpodobnost úpadku české a německé vlády



Zdroj: Deutsche Bank (2013), data od Bloomberg.

Poznámka: CDS spread je procentní velikost jistiny, kterou musí subjekt platit, aby mu protistrana kompenzovala ztrátu v případě úpadku vlády. Vyšší spread znamená vyšší vnímané riziko úpadku. Pravděpodobnost selhání vypočtena z CDS spreadů za předpokladu 45% návratnosti v případě selhání.

Tab. 3.4 Rozdíly mezi swapovými sazbami na CZK a na EUR v procentních bodech

Splatnost	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20
28.02.2014	0,01	0,17	0,19	0,18	0,16	0,13	0,10	0,09	0,06	0,04	0,03	0,00	-0,01
11.04.2013	0,05	0,09	0,05	0,01	-0,06	-0,14	-0,19	-0,25	-0,29	-0,34	-0,39	-0,41	-0,42
12.09.2012	0,14	0,35	0,26	0,16	0,06	-0,01	-0,08	-0,12	-0,15	-0,17	-0,22	-0,26	-0,29
07.06.2011	-0,55	-0,28	-0,35	-0,34	-0,35	-0,43	-0,39	-0,40	-0,42	-0,38	-0,38	-0,38	-0,38
01.06.2010	0,09	0,30	0,21	0,20	0,12	0,05	0,00	-0,04	-0,06	-0,06	-0,06	-0,11	-0,14
13.08.2009	0,71	0,73	0,61	0,65	0,54	0,45	0,35	0,25	0,23	0,21	0,17	0,20	0,10
30.06.2008	-0,86	-0,85	-0,75	-0,63	-0,52	-0,44	-0,38	-0,33	-0,30	-0,28	-0,22	-0,16	-0,12
24.08.2007	-1,08	-0,72	-0,59	-0,53	-0,48	-0,43	-0,38	-0,35	-0,30	-0,26	-0,23	-0,21	-0,16
08.03.2006	-0,74	-0,66	-0,52	-0,45	-0,40	-0,37	-0,34	-0,32	-0,29	-0,27	-0,23	-0,20	-0,17
13.06.2005	-0,43	-0,30	-0,21	-0,15	-0,12	-0,08	-0,08	-0,07	-0,05	-0,06	-0,06	-0,07	-0,08
05.01.2004	0,06	0,19	0,20	NA	NA	0,19	NA	0,19	NA	0,19	0,20	NA	0,18

Zdroj dat: Patria (2014).

Poznámka: Zvýrazněny jsou vyšší než 20% odchylky od českých swapových sazeb. Kladná čísla znamenají, že české swapové sazby jsou vyšší, tj. že se očekávají v budoucnu vyšší úrokové sazby na korunu než na euro. Konkrétní den v každém roce byl vybrán náhodně.

Ukazuje se tedy, že mezi českým a německým trhem existují nezanedbatelné rozdíly. Pokud přímo užijeme svenssonovské odhady z německého trhu jako aproximaci české bezrizikové

míry, dopouštíme se koncepční, a v mnohých případech i kvantitativně nezanedbatelné, nepřesnosti⁸⁶.

Řešením může být kompenzace německých spotových měr o vyšší riziko české vlády. Jak ale rozdíl ve výnosech do doby splatnosti dluhopisů na Obr. 3.4 naznačuje, riziko není v rámci splatností konstantní a jeho kompenzace proto nebude triviální. Druhou možností je použití dat o českých dluhopisech.

Ve zbytku článku se podíváme na možnost užívat data z českého trhu. Data o českých státních dluhopisech jsou k dispozici například na Patria (2014a) či v systémech Bloomberg a Reuters.

3.4 Podmínky kladené na datovou základnu

Pokud chceme odhadnout Svenssonovu funkci na dluhopisových datech z českého trhu, stojí za to nejprve posoudit, jaké požadavky musí vstupní data splňovat, aby výsledek byl smysluplný. Obecně lze na datovou základnu klást 3 požadavky.

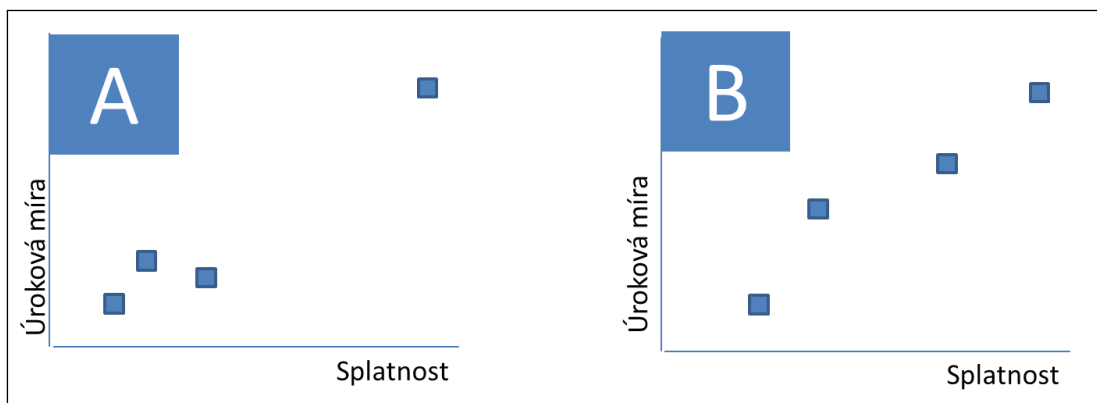
- **Počet dat.** Je potřeba alespoň 6 známých datových bodů (obchodovaných splatností dluhopisů), aby bylo vůbec možné metodu použít.⁸⁷ Vyšší počet dluhopisů je pochopitelně výhodnější než nižší.
- **Rozložení dat.** Je třeba, aby datové body (zbytkové splatnosti dluhopisů) ležely v rozumných rozestupech od sebe. V opačném případě je kvalita odhadu snížena relativním nedostatkem datových bodů na některém splatnostním horizontu. To je demonstrováno na Obr. 3.7: rozložení dat v panelu B je příhodnější než rozložení dat v panelu A, přičemž u státních dluhopisů se budeme spíše setkávat ze situací podobnou panelu A.
- **Kvalita dat.** Spolehlivost jednotlivých datových bodů je dána tím, že obchodované instrumenty jsou podloženy reálnými transakcemi (tj. že dluhopisový trh je likvidní). Lze se domnívat, že Svenssonovo prokládání může vyrovnáním dat částečně potlačit tyto nedokonalosti.⁸⁸ Nekvalita dat ale obecně snižuje přesnost odhadu a v případě značné nelikvidity se tržní data stávají imaginárními hodnotami.

⁸⁶ Přesnou velikost způsobené chyby lze posoudit až se znalostí konkrétního okamžiku (dne) oceňování.

⁸⁷ Protože potřebujeme odhadnout 6 Svenssonových parametrů.

⁸⁸ Doplnkové simulace na prostředí českého trhu (výsledky k dispozici od autora) ukázaly, že pro typické tvary výnosových křivek (lineárně rostoucí a S-křivka) přináší Svenssonovo proložení zlepšení přesnosti odhadu, jsou-li vstupní data spojena s určitými náhodnými nepřesnostmi (např. způsobenými právě nižší likviditou trhu). Pro méně typické složitější tvary jako například výnosová křivka s velkým hrbem či nepravidelné tvary výnosové křivky však Svenssonovo proložení nemusí znamenat zlepšení odhadu.

Obr. 3.7 Příhodnější a méně příhodné rozložení datových bodů



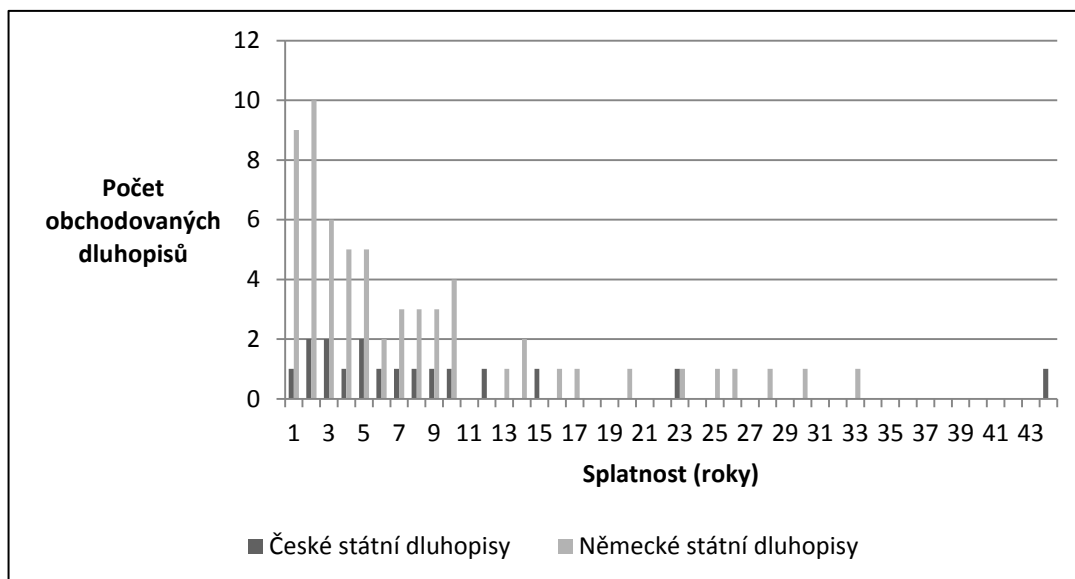
Zdroj: Autor

Jak si v těchto ohledech vede český dluhopisový trh, zejména v porovnání s německým trhem, na kterém je Svenssonův postup schválen pro oceňovací účely?

Počet a rozložení dat. Jak je ukázáno na Obr. 3.8, na trhu existuje výrazně vyšší počet německých státních dluhopisů než českých (62 oproti 17 po vyloučení indexovaných dluhopisů a dluhopisů s proměnlivým kupónem, které se oceňují odlišně).

Přesto však se českých dluhopisů se splatností do 10 let obchoduje dostatečný počet a jsou k dispozici i 4 dluhopisy se splatností nad 10 let. V porovnání s korunovými úrokovými swapy, které se běžně kótují pro 1, 2 až 10 let a dále 12, 15 a 20 let, vynívá dluhopisová datová základna jako srovnatelně rozsáhlá a dostatečná k bezproblémovému používání metody.

Obr. 3.8 Počet německých a českých státních dluhopisů obchodovaných k 18.7.2014



Zdroj dat: DBB (2014) a Patria (2014a).

Kvalita dat. Likviditu jednotlivých dluhopisových instrumentů nelze bez další analýzy posoudit. Můžeme se však domnívat, že vzhledem k poměrně dobré mezinárodní reputaci české vlády, stabilnímu makroekonomickému prostředí a vysokému objemu volných prostředků, které české

banky potřebují bezpečně investovat, je o české vládní dluhopisy dostatečný zájem, což je projev v odpovídající likviditě jejich trhu.⁸⁹

Zdá se tedy, že český trh se státními dluhopisy dává prostor k použití Svenssonova postupu. V další kapitole tuto myšlenku dále rozvedeme, když budeme sledovat kvalitu Svenssonova prokládání v situaci podobné stávajícímu českému dluhopisovému trhu.

3.5 Kvalita proložení u českých dat

V této části provedeme jednoduchou kvantitativní analýzu Svenssonova prokládání. Zaměříme se na stabilitu Svenssonových parametrů v čase (kapitola 3.5.1) a schopnost prokládat skutečná tržní data o výnosnostech (kapitola 3.5.2).

Protože cílem bude zejména posoudit smysluplnost odhadování na datech pro český trh, vyjdeme z českých dat. Nejlepší by bylo použít data o dluhopisech; ty však, jak bylo ukázáno v kapitole 3.2, dokážeme převést na spotové míry pouze za pomoci Svenssonova (nebo jiného) vyrovnávání. Tím by se analýza dostala do bludného kruhu. Proto použijeme náhradní řešení – využijeme spotové míry získané z korunových swapů z datového souboru Dvořák (2014b)⁹⁰. Abychom co nejlépe kopírovali zbytkovou splatnostní strukturu českých státních dluhopisů (Obr. 3.8), použijeme spotové míry pro 1, 2, 3 až 10 let a dále 12, 15 a 20 let, přičemž hodnotu pro 2, 3 a 5 let použijeme dvakrát⁹¹. Tato data proložíme Svenssonovou funkcí a změříme, jak přesné toto proložení je.⁹²

3.5.1 Stabilita parametrů

Nejprve posoudíme, zda svenssonovské parametry v rovnici [2] mají tendenci být v čase stabilní, nebo i ve velmi krátkodobém horizontu fluktuují. K tomu byla spočtena průměrná mezidenní odchylka (v absolutní hodnotě) a variační koeficient (směrodatná odchylka dělená průměrem absolutních hodnot parametru) jak u denních odhadů vycházejících z korunových swapů, tak pro srovnání i u odhadů publikovaných Bundesbank pro rozvinutý německý trh. Mezidenní změnu parametrů si vynucuje v rozhodující míře vývoj tržních cen dluhopisů. Ty se ale mezi sousedními dny obvykle příliš silně nemění.⁹³

Výsledky uvedené v Tab. 3.5 ukazují, že odhady jednotlivých parametrů se každodenně liší, a to mnohdy velmi výrazně. České parametry kolísají daleko více než německé, protože (1) menší počet dat na českém trhu znamená užší svázání parametrů s daty v každém dnu, (2) Bundesbank omezuje přípustné hodnoty parametrů a zřejmě i (3) parametry odhaduje propracovanějším způsobem. I německé parametry ovšem kolísají značně: např. průměrnou mezidenní změnu β_0 lze interpretovat tak, že dlouhodobá rovnovážná míra se mezidenně liší průměrně o 0,17 procentního bodu, což je z ekonomického pohledu nereálně mnoho.

⁸⁹ V této souvislosti lze uvést, že používáme-li výnos do splatnosti dlouhodobého státního dluhopisu jako bezrizikovou míru, rovněž spoléháme na dostatečnou likviditu daného instrumentu.

⁹⁰ Od září 2014 je datový soubor k dispozici na stránkách IOM VŠE (<http://iom.vse.cz/odborna-cinnost/bezrizikova-vynosnost-z-urokovych-swapu/>).

⁹¹ Kvalitativní výsledky by se však nezměnily, pokud bychom všechna data použili pouze jednou.

⁹² Složitějším přístupem by bylo nasimulovat teoretickou spotovou výnosovou křivku, na základě ní stanovit ceny dluhopisů se splatnostmi odpovídajícím tržně obchodovaným instrumentům a v dalším kroku posoudit soulad spotové křivky získané Svenssonovým proložením s teoretickou.

⁹³ Dále se mírně mění i doba do splatnosti jednotlivých výplat a v mezi některými dny dochází ke změně díky vydání nového dluhopisu či splacení kupónů/nominále některého z dluhopisů. To jsou ale v celkovém součtu velmi málo četné okamžiky.

Tab. 3.5 Stálost parametrů odhadu Svenssonova modelu pro česká a německá data

	β_0	β_1	β_2	β_3	τ_1	τ_2
Český trh						
Variační koeficient parametru	0,940	3,859	2,930	3,048	0,876	0,643
Průměrná absolutní mezidenní odchylka	13,261	101,278	207,248	139,288	6,746	5,219
Průměrná absolutní velikost parametru	19,569	76,401	151,924	120,123	9,624	9,981
Německý trh						
Variační koeficient parametru	0,233	0,516	1,525	1,374	1,103	1,302
Průměrná absolutní mezidenní odchylka	0,222	0,294	1,105	1,044	0,750	0,430
Průměrná absolutní velikost parametru	6,399	4,494	4,226	5,121	4,775	2,948

Zdroj dat: Deutsche Bundesbank (2014a), Dvořák (2014b).

Poznámka: Denní data za období 2.9.2004-18.7.2014 (český trh) a 7.1.2004 – 24.7.2014 (německý trh). Uvedené parametry při použití v rovnici [2] přináší výsledky v % p.a.

Kolísavost parametrů je dána tvarem rovnice [2]. Ten v mnohých případech vede k tomu, že různé kombinace parametrů produkují podobně dobré proložení dat (Kladívko 2010, s. 316), čímž malá variace vstupních dat podstatným způsobem změni optimální hodnoty parametrů.⁹⁴ To ale naštěstí neznamená, že by stejně kolísavé byly i výsledky modelu, tj. spotové míry.

Parametry funkce tedy nelze vnímat jako dlouhodobě stabilní hodnoty. Proto není příliš vhodné používat funkci odvozenou pro jiný den, než pro den, na jehož datech byla odhadnuta. **Nutnost výsledky každodenně aktualizovat** není vzhledem ke komplikovanosti odhadovacího postupu dvakrát povzbudivá.

3.5.2 Kvalita proložení

Přestože odhady parametrů se v minulé kapitole ukázaly jako problematické, parametry jsou pouze technickou záležitostí. Jediné, na čem záleží, je, aby získané výnosové míry dobře kopírovaly tržní data, jinak by nebylo možné metodu propagovat k užití pro oceňovací účely. To bude prozkoumáno v této kapitole.

Použijeme spotové míry z korunových swapových sazeb z dat Dvořák (2014b) za posledních necelých 10 let. Vycházíme tím jednak ze skutečných tvarů české výnosové křivky, a dále dlouhodobostí souboru redukuje vliv náhodnosti při výběru konkrétního dne, tj. výběru konkrétního tvaru výnosové křivky. Budeme zkoumat:

1. **celkovou kvalitu proložení**, tj. rozdíl (v absolutní hodnotě) mezi tržní spotovou mírou a Svenssonem implikovanou spotovou mírou pro horizonty, v nichž existuje tržní spotová míra,

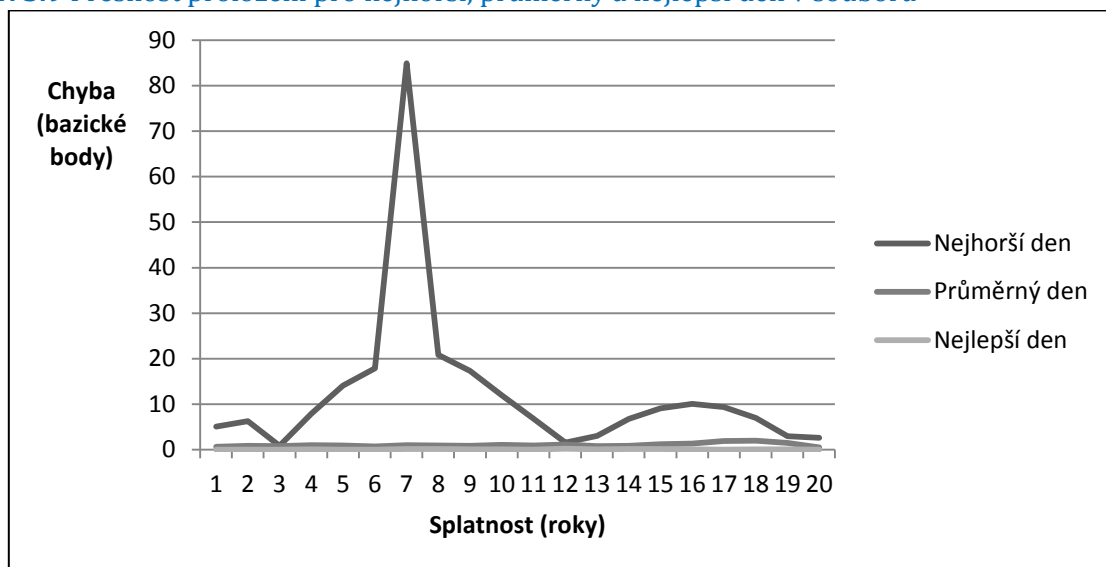
⁹⁴ Nebo, ještě hůře, optimalizační procedura přináší různé hodnoty optimálních parametrů podle toho, od jakých úvodních hodnot parametrů vychází. Blíže Gilli – Grosse – Schumann (2010).

2. zda **některé splatnostní horizonty** trpí obecně horší kvalitou proložení než jiné.

Celková kvalita proložení. Obr. 3.9 ukazuje velikost chyby vyrovnání pro nejlepší a nejhorší den. Nejhorší z 2577 pozorování má nejvyšší chybu 83 bazických bodů (tj. 0,83 procentního bodu)⁹⁵. V nejlepším dni se chyby pohybují v řádu kolem desetiny bazického bodu. Průměrná hodnota je mezi těmito extrémy daleko blíže nejlepšího výsledku.

Velikost průměrné odchylky je v řádu jednotek bazických bodů a chyba vyšší než 4 bazické body je značně neobvyklá (Obr. 3.10). Můžeme proto konstatovat, že Svenssonova funkce vyrovnává česká výnosová data velmi obstojně.

Obr. 3.9 Přesnost proložení pro nejhorší, průměrný a nejlepší den v souboru

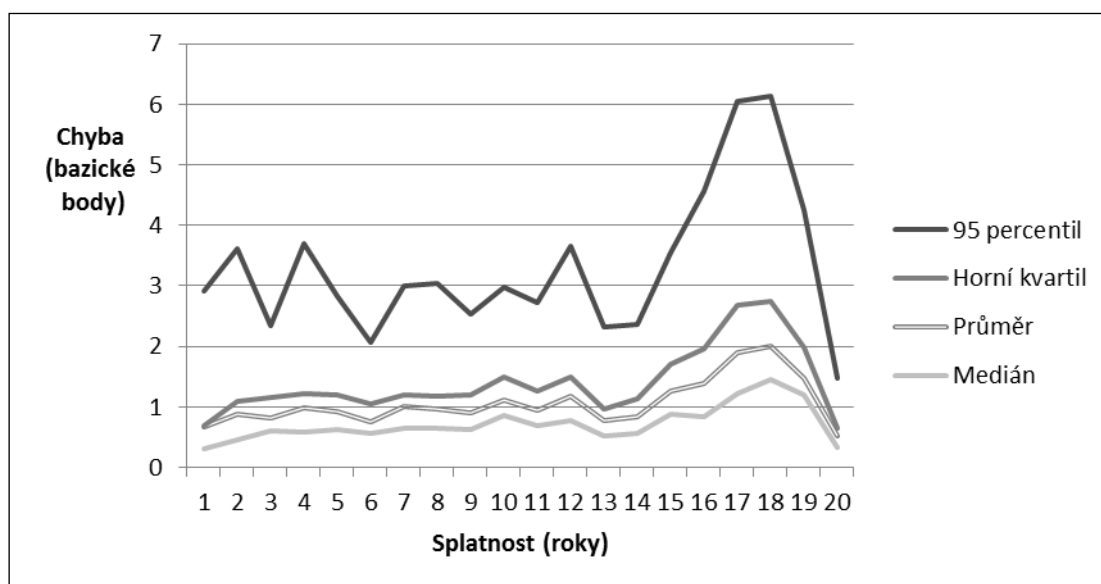


Zdroj dat: Dvořák (2014b), data o swapových sazbách z Reuters. 2577 denních pozorování v období 2.9.2004-18.7.2014.

Poznámka: Parametry odhadnuty na spotových mírách pro splatnosti 1, 2, 3 až 10 let, dále 12, 15 a 20 let, přičemž pozorování pro 2, 3 a 5 let byly užity dvakrát, aby se zdrojová data přiblížila splatnostní situaci na českém dluhopisovém trhu. *Nejlepší den* (6.12.2005) a *nejhorší den* (7.6.2005) odkazují na součet čtverců mezi tržní a vyrovnanou hodnotou pro všechny výše popsané splatnosti. *Průměrný den* značí průměrnou absolutní odchylku pro každou splatnost.

⁹⁵ Velká chyba nastala „nejhoršího dne“ je zapříčiněna mimořádně významným jednoletým „zubem“ ve spotové výnosové křivce. Taková situace je na trhu zcela výjimečná.

Obr. 3.10 Ukazatele přesnosti proložení pro jednotlivé splatnosti



Zdroj dat: Dvořák (2014b), data o swapových sazbách z Reuters. 2577 denních pozorování v období 2.9.2004-18.7.2014.

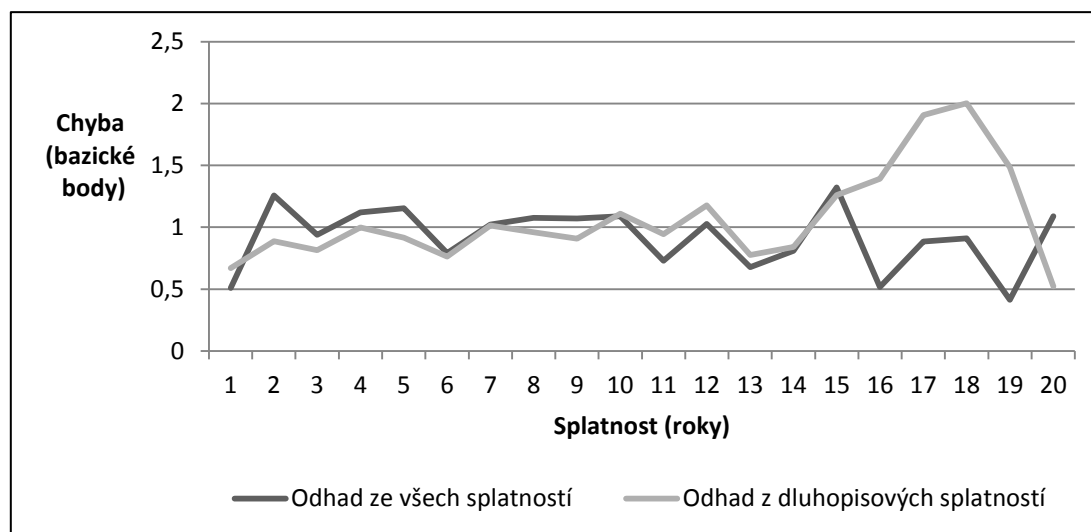
Poznámka: Parametry odhadnuty na spotových mírách pro splatnosti 1, 2, 3 až 10 let, dále 12, 15 a 20 let, přičemž pozorování pro 2, 3 a 5 let byly užity dvakrát, aby se zdrojová data přiblížila splatnostní situaci na českém dluhopisovém trhu.

Kvalita proložení na různých splatnostních horizontech. Z Obr. 3.10 je patrné, že nejhorší vyrovnávání nastává pro horizonty nad 10 let. To je zapříčiněno zejména tím, že ve vstupních datech (a ostatně i na dluhopisovém trhu) máme pro odhad pouze 3 splatnosti, díky čemuž (1) se Svenssonova funkce nemůže adaptovat k chybějícím datům a (2) kvůli menšímu počtu bodů není odchylka na tomto segmentu penalizována tak silně.⁹⁶ Pokud bychom měli data rozložená vhodněji – například znali spotovou míru pro všechny celé roky až do dvacátého (srov. Obr. 3.7)⁹⁷, vyrovnávání na horizontu nad 10 let by bylo srovnatelné s ostatními horizonty (Obr. 3.11).

⁹⁶ Do výrazu [3], který Svenssonovy parametry minimalizují, přispívá proložení horizontů nad 10 let pouze třemi členy: pro 12, 15 a 20 let, kdežto proložení horizontů do 10 let třinácti členy.

⁹⁷ Zde využíváme faktu, že z dat Dvořák (2014b) známe spotové míry pro všechny splatnosti.

Obr. 3.11 Vliv chybějících splatností na přesnost proložení



Zdroj dat: Dvořák (2014b), data o swapových sazbách z Reuters. 2577 denních pozorování v období 2.9.2004-18.7.2014.

Poznámka: *Odhad ze všech splatností* používá pozorování spotových měr pro 1, 2 až 20 let. *Odhad z dluhopisových splatností* používá pozorování spotových měr pro splatnosti 1, 2, 3 až 10 let, dále 12, 15 a 20 let, přičemž pozorování pro 2, 3 a 5 let byly užity dvakrát, aby se zdrojová data přiblížila splatnostní situaci na českém dluhopisovém trhu.

Lze říci, že (1) s výjimkou horizontu nad 10 let nepozorujeme významné rozdíly v kvalitě proložení podle splatností, (2) proložení nejdelšího konce (tj. 20 let) je vynikající⁹⁸ a (3) i pro nejméně dobrý horizont kolem 15 let není chyba vzniklá použitím Svenssonovy funkce nijak dramatická – stále se pohybuje kolem cca 2 bazických bodů.

3.5.3 Svenssonova funkce v období za nejdelší splatností⁹⁹

Posledním problémem, který zde prozkoumáme, bude chování Svenssonovy funkce za horizontem nejdelší splatnosti, kterou jsme použili ve vývoji modelu. Do rovnice [2] totiž lze dosahovat splatnosti libovolně dlouhé; otázkou je, zda je takový postup nejen možný, ale i vhodný.

Schich (1997, s. 3) a Tab. 3.1 ukazuje, že dlouhodobé míry ve Svenssonově funkci konvergují k hodnotě β_0 . Nabízí se možnost ji považovat za odhad velmi dlouhodobé rovnovážné míry. Tato interpretace je však extrémně nedoporučená, a to z 5 důvodů.

- Svenssonova funkce je optimalizována výhradně na základě existujících bodů (srov. výraz [3] nebo [7]) a chování funkce **za horizontem posledního bodu není ničím korigováno.**

⁹⁸ To je příjemným překvapením. Ve statistice je totiž známým faktem, že regresní proložení bývá nejdokonalější ve středu pole a krajní hodnoty jsou odhadovány méně přesně (Hindls et al 2007, s. 228, Greene 2012, s. 121).

⁹⁹ Chování na dlouhém konci výnosové křivky je důležité skrze nutnost stanovit bezrizikovou míru pro výpočet pokračující (či exitové) hodnoty, která obvykle tvoří podstatnou část celkové hodnoty podniku. Naopak bezrizikové míry s ultrakrátkou splatností nejsou pro oceňování podniků příliš relevantní. Proto zde kvůli úspoře místa nebudeme studovat chování Svenssonovy funkce pro horizonty *kratší* než je nejkratší splatnost vstupních dat. Lze však konstatovat, že použití Svenssona pro tento horizont nelze příliš doporučit.

- **Konvergence** je **mimořádně pomalá**: může trvat desítky let, než se hodnota funkce přiblíží hodnotě β_0 a velikost měr se v tomto průběhu může i zněkolikanásobit.
- Parametr β_0 může nabývat hodnot, které jsou coby dlouhodobá rovnovážná hodnota **ekonomicky zcela nesmyslné** (viz záporné nebo vysoké kladné hodnoty v Obr. 3.12).
- Odhad parametru **velmi fluktuuje** i v krátkém období (Obr. 3.12), což by nemělo být vlastností rovnovážného stavu.
- Jak již bylo řečeno, **techniky pro odhad parametrů** nejsou dokonalé a různé kombinace parametrů mohou dát stejně dobré proložení bodů (Kladívko 2010, Gilli – Grosse – Schumann 2010). To nehraje velkou roli při prokládání uvnitř souboru. Plně se to však projeví, pokud nás zajímá konkrétní hodnota parametru β_0 .

Některé z těchto námitek by technicky bylo možné překonat nastavením různých omezení na hodnotu parametru β_0 (např. aby byl kladný, což je omezení, které používá Bundesbank, ale šlo by jít ještě dále a kupříkladu stanovit $\beta_0 = 4\%$ na základě historických průměrů¹⁰⁰). Tím dojde k určité stabilizaci parametru. Daní za to ovšem je horší prokládání dat uvnitř souboru a zejména možný koncepční nesoulad s tržním oceněním (kap. 3.2.3), protože volba hodnot dlouhodobé rovnováhy je poměrně subjektivní záležitostí.

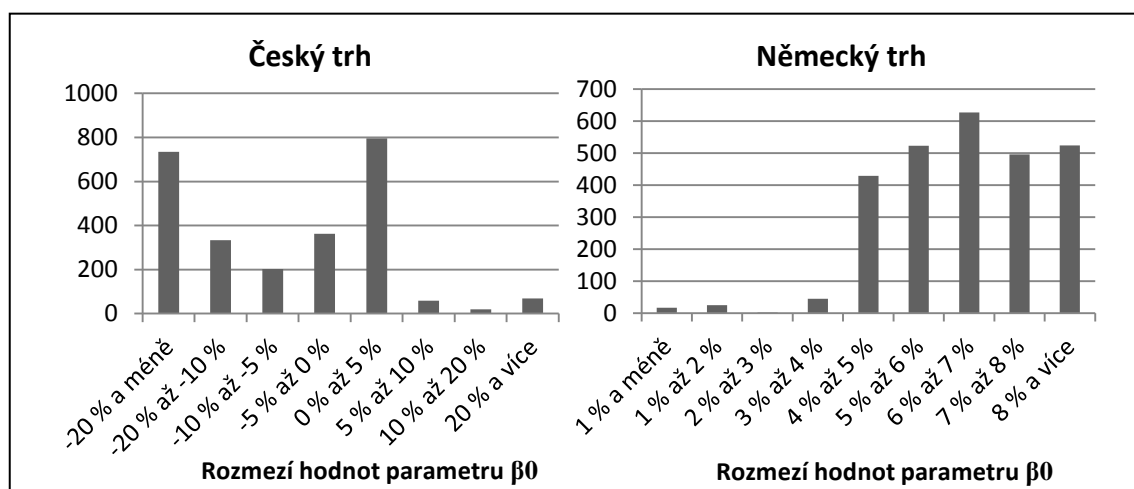
Proto nelze doporučit dosazování (výrazně) delších splatností, než je nejdelší splatnost užitá při výstavbě modelu, v čem se shodujeme s Maříková – Mařík (2012, s. 68). Pro stanovení spotové míry pro delší horizonty (S_T) je zřejmě nejvhodnější vyjít z roční termínové míry pro poslední rok, tj. pokud máme poslední datový bod 20 let od současnosti, pak pro vzdálenější roky použít výraz

$$S_T = \sqrt[T]{(1 + \tilde{S}(20))^{20} \cdot \left[\frac{(1 + \tilde{S}(20))^{20}}{(1 + \tilde{S}(19))^9} \right]^{T-20}} - 1, \quad [10]$$

kde $\tilde{S}(19)$ a $\tilde{S}(20)$ jsou Svenssonovy odhady 19 a 20 leté spotové míry a $T > 20$. Na českém trhu ovšem existuje státní dluhopis s momentálně více než 30 letou splatností, tudíž tento problém není příliš palčivý.

¹⁰⁰ Na druhou stranu toto může být řešením v situaci, kdy na trhu panují extrémně nízké (či naopak extrémně vysoké) úrokové sazby i pro nejdelší obchodované splatnosti a oceňovatel chce zdůraznit, že ve velmi dlouhém období se sazby musí navrátit k „normálním“ hodnotám.

Obr. 3.12 Počty denních pozorování s příslušnými hodnotami dlouhodobé úrokové míry Svenssonovy funkce



Zdroj dat: Deutsche Bundesbank (2014a), Dvořák (2014b). Denní data za období 2.9.2004-18.7.2014 (český trh) a 7.1.2004 – 24.7.2014 (německý trh).

3.6 Závěr

Svenssonova funkce je koncept, který umožňuje vhodně prokládat datové body. Přestože může být použit pro libovolné veličiny, hodí se zejména pro konstrukci spotových výnosových křivek vycházejících ze státních dluhopisů. Toho lze využít při stanovení bezrizikových měr v oceňování.

Svenssonova funkce nebo některá z jeho alternativ jsou nutnou podmínkou užívání bezrizikové míry ze státních dluhopisů, chceme-li mít bezrizikové míry diferencované podle splatnosti, což nejpokročilejší přístupy k diskontní míře požadují.

Postup založený na Svenssonově funkci, nazývaný jako Svenssonova metoda, je popularizován pro svou uživatelskou jednoduchost a schopnost přinést bezrizikové míry pro celé kontinuum splatností. Uživatelská jednoduchost je však získána za cenu charakteru „černé skříňky“, tedy že oceňovatelé užívají již odhadnuté výsledné míry (tj. z Deutsche Bundesbank 2014a nebo IOM 2013) nebo již odhadnuté hodnoty parametrů. Takový přístup si vyžádala extrémní výpočetní složitost modelu, pro kterou nelze požadovat, aby si model každý oceňovatel implementoval sám. Daní za to ovšem je snižená schopnost uživatelů model připomínkovat a modifikovat pro své potřeby.

V rámci posouzení Svenssonova postupu jsme konstatovali, že podobné modely založené na prokládání dat nejsou filozoficky zcela konzistentní s tržním oceněním, protože neužívají tržní data v maximální možné míře. Svenssonova funkce ovšem dokáže velmi dobře prokládat tržní data, včetně skutečných spotových měr z českého úrokového trhu: chyby se pohybují v řádech několika setin procent. Z toho důvodu lze model bez výhrad doporučit pro konstrukci bezrizikových měr z českých dluhopisů, a to i pro ocenění tržní.

Je však třeba mít na paměti 2 omezení modelu. Zaprvé, není vhodné do výsledné funkce dosazovat splatnostní horizonty delší než je splatnost nejdelšího instrumentu užitého pro výstavbu modelu, protože na těchto horizontech je Svenssonova funkce fikcí bez těsného vztahu k trhu. Zejména pak užívání nekonečného horizontu jako odhadu dlouhodobé rovnovážné úrokové míry může vést ke katastrofálním výsledkům.

Zadruhé, model je extrémně citlivý na vstupní data. Jeho parametry proto nereprezentují setrvalý stav. Z tohoto důvodu je není vhodné používat pro *jiné dny*, než na kterých byly parametry odhadnuty. Ještě méně je vhodné je používat pro *jiné trhy*, než odkud parametry pochází. Konkrétně v případě užívání německých parametrů pro aproximaci parametrů bezrizikové míry na českém trhu vnášíme mnohdy nemalou chybu vzniklou odlišnou rizikovostí státních dluhopisů, odlišnými podmínkami na peněžním trhu a odlišnými očekáváními ohledně vývoje úrokových měr. Není proto možné si parametry z německého trhu jednoduše „vypůjčit“. Jednou schůdnou možností je převzít celý CAPM model např. z německého trhu včetně bezrizikové míry sestavené Svenssonovou funkcí na německých státních dluhopisech a CAPM posléze adaptovat pro český trh. Druhou možností, ke které se osobně přikláním, je vyvinout Svenssonův model na českých dluhopisových datech.

Na okraj lze konstatovat, že Svenssonova funkce s arbitrárně stanovenou dlouhodobou úrokovou mírou může být způsobem, jak modelovat přechod od současných mimořádně nízkých tržních sazeb k dlouhodobě rovnovážným hodnotám.

Literatura

- [1] American Society of Appraisers (2009). *ASA Business Valuation Standards*. [cit. 8.7.2013] Dostupné na <http://www.appraisers.org/files/professional%20standards/bvstandards.pdf>.
- [2] Arnold, S. – Lahmann, A. – Schwetzler, B. (2011) *A note on using the Svensson procedure to estimate the risk free rate in corporate valuation*. Leipzig Graduate School of Management, Finexpert.
- [3] Česká národní banka (2013). *Rating agencies: Foreign Currency Long-Term Sovereign Debt Ratings*. Dostupné z http://www.cnb.cz/en/about_cnb/international_relations/rating/
- [4] Damodaran, A. (2013). *Annual Returns on Stock, T.Bonds and T.Bills: 1928 - Current*. [cit. 15.7.2013]. Dostupné z http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/datafile/histretSP.html
- [5] Damodaran, A. (2008). *What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block*. Stern School of Business, New York University. [cit. 7.7.2013] Dostupné z: <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf>.
- [6] Deutsche Bank (2013). *Sovereign default probabilities online*. [cit. 17.7.2013]. Dostupné z [http://www.dbresearch.com/servlet/reweb2.ReWEB?rwnode=DBR_INTERNET_EN-PROD\\$NAVIGATION&rwobj=CDS.calias&rwsite=DBR_INTERNET_EN-PROD](http://www.dbresearch.com/servlet/reweb2.ReWEB?rwnode=DBR_INTERNET_EN-PROD$NAVIGATION&rwobj=CDS.calias&rwsite=DBR_INTERNET_EN-PROD)
- [7] Deutsche Bundesbank (2014). *Prices and yields: Prices and yields of listed Federal securities: July 2014*. [cit. 26.7.2014] Dostupné z http://www.bundesbank.de/Navigation/EN/Service/Federal securities/Prices and yields/prices_and_yields.html.
- [8] Deutsche Bundesbank (2014a). *Macro-economic time series: Term structure on listed Federal securities (monthly and daily data)*. [cit. 26.7.2014]. Dostupné z http://www.bundesbank.de/Navigation/EN/Statistics/Time_series_databases/Macro_economic_time_series/its_list_node.html?listId=www_s140_it03a.
- [9] Deutsche Bundesbank (2014b). *Macro-economic time series: Parameters (monthly and daily data)*. [cit. 26.7.2014]. Dostupné z

- [http://www.bundesbank.de/Navigation/EN/Statistics/Time series databases/Macro economic time series/its_list_node.html?listId=www_s140_it04c](http://www.bundesbank.de/Navigation/EN/Statistics/Time_series_databases/Macro_economic_time_series/its_list_node.html?listId=www_s140_it04c).
- [10] Dobiáš, Vladimír (2008). *Arbitrage-Free Yield Curve*. Disertační práce VŠE v Praze.
- [11] Dvořák, M. (2014). Užití swapových sazeb pro stanovení bezrizikové míry se zřetelem na Českou republiku. *Oceňování* 7, 1, 3-26.
- [12] Dvořák, M. (2014a). *Beta faktor a ekvinní prémie z cizího trhu: přenositelnost a statistická spolehlivost*. Verze 15. 4. 2014. [cit. 31.7.2014]. Dostupné z http://www.michaldvorak.eu/resources/Beta_faktor.pdf
- [13] Dvořák, M. (2014b). *Bezrizikové míry získané z korunových swapových sazeb*. [cit. 31.7.2014]. Dostupné z http://www.michaldvorak.eu/resources/Swap_Implied_RF.xlsx
- [14] Gilli, M. – Grosse, S. – Schumann, E. (2010). *Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model*. Comisef Working Paper 031. [cit. 31.7.2014]. Dostupné z <http://comisef.eu/files/wps031.pdf>
- [15] Greene, W. H. (2012). *Econometric Analysis*. Seventh Edition. Harlow: Pearson.
- [16] Hindls, R. – Hronová, S. – Seger, J. – Fischer, J. (2007). *Statistika pro ekonomy*. Osmé vydání. Praha: Professional Publishing.
- [17] Hladíková, H. – Radová, J. (2012). *Term Structure Modelling by Using Nelson-Siegel Model*. *European Financial and Accounting Journal* 7,2, 36-55.
- [18] IDW (2008). *IDW Standard 2008 – Grundsätze zur Durchführung von Unternehmensbewertungen*. Institut der Wirtschaftsprüfer.
- [19] Institut oceňování majetku Vysoké školy ekonomické (2013). *Svenssonova metoda*. Dostupné z <http://iom.vse.cz/odborna-cinnost/svenssonova-metoda/>
- [20] Kládívko, K. (2010). *The Czech Treasury Yield Curve from 1999 to the Present*. *Czech Journal of Economics and Finance* 60, 4, s. 307-335.
- [21] Maříková, P. – Mařík, M. (2012). *Odvozování bezrizikové výnosové míry z tržních dat pomocí Svenssonovy metody*. *Odhadce a oceňování majetku* 4/2012, s. 67-79.
- [22] Mařík, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: Hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.
- [23] Nelson, C. R. – Siegel, A. F. (1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. *Journal of Business* 60, 473-489
- [24] Patria (2014). *Měny a sazby – Databáze finančních údajů*. [cit. 27.7.2014]. Dostupné z <http://www.patria.cz>
- [25] Patria (2014a). *Dluhopisy online: Státní ČR*. [cit. 19.7.2014]. Dostupné z <http://www.patria.cz>
- [26] Schich, S. T. (1997). *Estimating the German term structure*. Discussion paper 4/97. Frankfurt Am Main: Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank.
- [27] Standard&Poor's (2013). *Sovereign Ratings And Country T&C Assessments*. [cit. 17.7.2013]. Dostupné z <http://www.standardandpoors.com/servlet/BlobServer?blobheadername3=MDT-Type&blobcol=urldata&blobtable=MungoBlobs&blobheadervalue2=inline%3B+filename>

[%3DTC Assessments 7 9 13.pdf&blobheadername2=Content-Disposition&blobheadervalue1=application%2Fpdf&blobkey=id&blobheadername1=content-type&blobwhere=1244295677712&blobheadervalue3=UTF-8](#)

- [28] Svensson, L. E. O. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. Seminar Paper No. 579. Stockholm: Institute for International Economic Studies, University of Stockholm.
- [29] Verbeek, M. (2012). *A Guide to Modern Macroeconomics*. 4th Edition. Chichester: John Wiley & Sons.

Kapitola 4

Bezrizikové sazby ze státních dluhopisů: metoda Fama-Bliss

Abstrakt

V německé a české oceňovací literatuře se poslední dobou prosazuje model výnosové křivky Nelson-Siegel-Svensson. Model je výpočetně nesnadný, vyžaduje více či méně arbitrárně stanovovat důležité parametry výpočtu a tímto modelem získané spotové sazby nevedou k ocenění použitých dluhopisů na úrovni pozorované tržní ceny. Určité východisko nabízí metoda Fama-Bliss. Ta předpokládá, že forwardové sazby jsou mezi splatnostmi na trhu obchodovaných dluhopisů konstantní. Metoda je výpočetně jednoduchá, jednoznačná a vede ke konzistentnímu ocenění obchodovaných dluhopisů. I když předpoklad po částech konstantní forwardové sazby není dokonalý z hlediska realističnosti, jednoduchost, univerzálnost a srozumitelnost předpokladu metodu předurčuje do role benchmarkové metody, se kterou se ostatní metody mohou porovnávat. Zvláště užitečná je proto v tržním nebo objektivizovaném ocenění.

4.1 Úvod

V posledních 5 letech vyšla v české literatuře řada příspěvků na téma bezrizikových výnosových měr při oceňování podniků a dalších dlouhodobých aktiv nebo pasiv (Mařík et al. 2011, Maříková – Mařík 2012, Dvořák 2014, Dvořák 2014a). Tradiční a v českém prostředí velmi rozšířené¹⁰¹ použití výnosu do doby splatnosti dlouhodobého státního dluhopisu (ať již v podobě historického průměru nebo údaje ke dni ocenění) jako bezrizikové míry pro všechny budoucí výnosové toky z oceňovaného aktiva se dostává do stále větší defenzivy. Moderní přístupy jsou založeny na použití celé výnosové křivky, tj. různých bezrizikových měr pro různé splatnosti. Požadavek konstrukce celé výnosové křivky vyžaduje kromě dostupnosti samotných tržních cen státních dluhopisů různých splatností rovněž znalost metody na odvození výnosové křivky.

Pro konstrukci celé výnosové křivky jsou často užívány metody založené na přístupech Nelson-Siegel (1987) nebo Svensson (1994). Ty však trpí určitými problémy, zejména neschopností přesně zreplikovat ocenění tržně obchodovaných dluhopisů a závislostí výsledků na konkrétní specifikaci výpočtu. Cílem tohoto článku je proto představit alternativní způsob, publikovaný

¹⁰¹ Dotazníkové šetření mezi 42 českými znalci a znaleckými ústavy v Hanzal (2015) o používaných přístupech ke stanovení bezrizikové míry potvrdilo dominanci metody založené na výnosu dlouhodobého dluhopisu.

v článku Fama-Bliss (1987). Bude poukázáno na jeho *konceptní* výhody při tržním nebo objektivizovaném oceňování dlouhodobých aktiv.¹⁰²

Článek je strukturován následujícím způsobem. V kapitole 4.2 jsou diskutovány problémy při stanovování bezrizikových měr pro oceňovací účely. V kapitole 4.3 je představena technika výpočtu metodou Fama-Bliss. V kapitole 4.4 je pro lepší názornost ukázán numerický výpočet metodou Fama-Bliss na datech z trhu státních dluhopisů České republiky. V kapitole 4.5 jsou popsány obecné charakteristiky metody Fama-Bliss, zejména ve srovnání s oblíbenou metodou Nelson-Siegel-Svensson. Kapitola 4.6 obsahuje závěrečné shrnutí.

4.2 Problémy při stanovování bezrizikových měr pro oceňovací účely

Pro korektnost ocenění je nutné, aby každý výnosový tok byl porovnán s výnosností alternativní investice se stejnou dobou do splatnosti. Například dividendy nastávající za 2 roky by měla být porovnána s instrumentem přinášejícím výnos za 2 roky. Tím pádem potřebujeme nikoli jednu bezrizikovou míru, nýbrž celou sérii bezrizikových měr, které budou přiřazovány jednotlivým výnosovým tokům podle jejich splatnosti. K tomu je potřeba dostatečný počet na trhu obchodovaných splatností instrumentů, ze kterých lze bezrizikovou míru odvodit. Z hlediska podkladových instrumentů jsou víceméně užívány pouze (1) úrokové swapy v příslušné měně a (2) státní dluhopisy v příslušné měně, přičemž úrokové swapy mají navrch.¹⁰³

Přístup používající **úrokové swapy** je z metodologického pohledu jednodušší a je prezentován např. v Mařík et al. (2011) nebo Dvořák (2014). Přístup založený na **státních dluhopisech**, které jsou v prostředí ČR i dalších zemí světa zpravidla kupónové¹⁰⁴, je komplikován v čase se měnící zbytkovou splatností dluhopisů na trhu a nepravidelným rozložením okamžiků výplat jejich kupónů a jmenovitých částek. V takovém případě není možné použít postup zvaný bootstrapping v čisté učebnicové podobě (Mařík et al. 2011, s. 291-295), ale je třeba se uchýlit k předpokladu o chování úrokových měr (blíže např. Dvořák 2014a).

Často užívaným předpokladem o chování úrokových měr je **Nelsonova-Siegelova** (1987) nebo **Svenssonova** (1994) funkce (dále zkráceně NSS). NSS předpoklad v oceňování využívá německá oceňovací praxe. Pro české prostředí se jím zabývá např. Maříková – Mařík (2012) nebo Dvořák 2014a.¹⁰⁵ Tvar NSS funkce je nelineární, z čehož pramení určité technické problémy s jejím odhadem (Slavík 2001, Kladívko 2010, Gilli et al. 2010, Dvořák 2014). Navíc je metoda založena na regresním proložení známých bodů, čímž odvozené spotové sazby povedou k jinému ocenění

¹⁰² Bezrizikové míry získané metodou Fama-Bliss z českých korunových státních dluhopisů budou pravidelně aktualizovány a publikovány na stránkách Institutu oceňování majetku Vysoké školy ekonomické <http://iom.vse.cz>.

¹⁰³ Např. metodologie Evropského orgánu pro pojišťovnictví a zaměstnanecké penzijní pojištění (EIOPA) se při oceňování dlouhodobých závazků z pojištění výslovně přiklání k užívání úrokových swapů (EIOPA, 2016). Státní dluhopisy používá až jako náhradní řešení, není-li swapový trh v dané měně dostatečně rozvinutý a likvidní. Pro CZK metodologie používá EIOPA úrokové swapy.

¹⁰⁴ Výjimku tvoří krátkodobé dluhopisy, v ČR nazývané pokladniční poukázky. Ty mají ovšem obvyklou splatnost do jednoho roku. Pro diskontování peněžních toků z dlouhodobé investice (např. podniku) je pak třeba splatností spíše dlouhodobých. Jednotlivě obchodované kupóny a nominále (tzv. stripy) naopak trpí nízkou likviditou a malou transparentností jejich tržních cen.

¹⁰⁵ Výsledky založené na odhadu německé centrální banky na německých státních dluhopisech jsou publikovány Institutem oceňování majetku VŠE (<http://iom.vse.cz/odborna-cinnost/svenssonova-metoda/>).

použitých dluhopisů, než je pozorováno na trhu. Rozdíl je však ve většině případů zanedbatelný (Dvořák 2014a).

Jiný předpoklad je použit v článku **Fama – Bliss** (1987). Je založen na představě, že mezi okamžiky, pro které máme k dispozici dluhopis příslušné splatnosti, je forwardová sazba konstantní. Protože se jedná o nejjednodušší metodu, může být považována za určitý benchmark pro konstrukci výnosových křivek. Užitečnost předpokladu je doložena hojným používáním metody ve finanční ekonomii (např. Hordahl et al. 2004, Diebold – Li 2006, Adrian et al. 2008, Ludvigson – Ng 2009, Koopman et al 2010, Priebsch 2013, a studie používající dataset CSRP¹⁰⁶). Pod názvem „step-function forward“ je tato metoda implementována i v systému Bloomberg.¹⁰⁷ Následující kapitoly se proto zabývají touto metodou.

V zájmu předejít nenaplnění očekávání je vhodné rovněž zmínit, co cílem článku není. Stranou ponecháme (1) otázku, zda je vhodnější užití swapových sazeb či státních dluhopisů jako podkladových instrumentů pro stanovení bezrizikové sazby a (2) otázku likvidity u českých státních dluhopisů (ČNB 2016) a řešení z toho vyplývajících komplikací. Dále (3) cílem článku rozhodně není diskutovat metodu v kontextu **jiných aplikací** bezrizikových výnosových měr, než je tržní oceňování dlouhodobých aktiv či pasiv. Oceňováním dlouhodobých aktiv myslíme zejména oceňování neobchodovaných aktiv, jako jsou účasti v nekótovaných podnicích nebo nemovitosti, které nezřídka provádějí znalci, či dlouhodobých závazků (např. v životním pojištění nebo výplat penzí). V těchto případech se pracuje s méně podrobnou strukturou peněžních toků (obvykle roční), ignoruje se krátký konec výnosové křivky (obvykle do 1 roku) a vyžaduje se, aby z procesu výpočtu byly co nejvíce vyloučeny subjektivní vlivy. V jiných aplikacích jsou naopak upřednostněna jiná kritéria. Při oceňování dluhopisů, derivátů či strukturovaných produktů prováděných tvůrci trhu nebo institucionálními investory je zapotřebí podrobnější výnosové křivky na krátkém konci, je důležité eliminovat i drobné nepřesnosti v tržních cenách podkladových instrumentů a subjektivita při způsobu výpočtu není překážkou. Při užití centrálními bankami a akademií k extrakci očekávání tržních účastníků (např. Kim – Orphanides, 2007) je naopak potřeba snížit dimenzionalitu reprezentace výnosové křivky. Totéž je potřeba v dynamických aplikacích, sloužícím k odhadování trajektorie výnosových křivek (např. Diebold – Li, 2006). V těchto případech metoda Fama-Bliss není vhodná.¹⁰⁸ Konečně, (4) cílem článku není hodnotit metody kvantitativně. A to z důvodu, že neexistuje způsob, jak takové hodnocení objektivně provést. Neexistuje nic jako „správná“ výnosová křivka, vůči které by bylo možné křivky konstruované pomocí posuzovaných metod porovnat. Podobná porovnání nabízí např. Jeffrey et al. (2006).¹⁰⁹

¹⁰⁶ <http://www.crsp.com/products/documentation/fama-bliss-discount-bonds-%E2%80%93-monthly-only>. Dataset i většina uvedených studií však metodou Fama-Bliss získané výnosové křivky dále upravuje.

¹⁰⁷ Viz interpolation method 3 v materiálu Bloomberg (2009).

¹⁰⁸ Jeden z recenzentů odmítl metodu Fama-Bliss jako „příliš jednoduchou“ a nezohledňující 30 let vývoje v metodologii konstrukce výnosových křivek. Tento vývoj je však důležitý zejména v aplikacích, které nejsou předmětem tohoto článku.

¹⁰⁹ Způsoby měření mohou být následující. (1) porovnání, jak dobře oceňuje obecný tvar křivky na trhu obchodované dluhopisy, (2) porovnání, jak dobře oceňuje obecný tvar křivky na trhu obchodované dluhopisy, které nebyly použity ke konstrukci prokládací křivky, nebo (3) porovnání kvality proložení nepozorovatelné reality z dat, která vychází ze simulované „správné křivky“ po přidání šumu. Tvar „správné křivky“ a podoba „šumu“ vyžadují učinit ad-hoc předpoklady, které ovšem omezují obecnost obdržených výsledků.

4.3 Konstrukce výnosové křivky metodou Fama-Bliss

Základním prvkem přístupu je předpoklad o chování forwardové sazby. Forwardovou sazbou je myšlena (typicky krátkodobá) úroková sazba platná pro okamžik v budoucnosti. Lze ji odvodit z aktuálních spotových sazeb s různými splatnostmi¹¹⁰. Fama-Bliss (1987) předpokládá, že forwardová sazba je mezi nejbližšími známými okamžiky konstantní. To znamená, že znázorníme-li forwardovou sazbu jako funkci času, pro který je tato sazba platná, bude její průběh schodovitý (viz Obr. 4.2). „Schody“ (tj. body nespojitosti) budou nastávat v momentech splatnosti na trhu obchodovaných instrumentů. Velikost forwardových sazeb je přitom stanovena tak, aby těmito sazbami diskontovaná současná hodnota peněžních toků z každého dluhopisu se přesně rovnala jeho tržní ceně.

Obecný postup konstrukce spotové křivky lze formálně popsat následujícím způsobem.

1. Získají se informace o dluhopisových instrumentech, ze kterých chceme výnosovou křivku konstruovat. V praxi to budou instrumenty vydané stejnou entitou, bezkupónové nebo s pevným kupónem¹¹¹, často s vyšší než minimální předdefinovanou dobou splatnosti¹¹² a bez přidružených opcí¹¹³. Informace musí být dostatečné k získání údaje o aktuální tržní ceně dluhopisu a stanovení kalendáře plateb z dluhopisů.
2. Dluhopisy se seřadí vzestupně podle zbytkové splatnosti. Máme-li n dluhopisů, označme jako

T_1, T_2, \dots, T_n jejich splatnosti (v letech),

P_1, P_2, \dots, P_n jejich tržní ceny v peněžních jednotkách včetně naběhlého úroku (neboli alikvótního úrokového výnosu),

c_1, c_2, \dots, c_n jejich kupónové sazby (v procentech na roční bázi),

$\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n$ frekvenci úrokových plateb (např. $\tau_3 = 4$ udává, že dluhopis s třetí nejkratší splatností poskytuje 4 úrokové platby za rok) a

N_2, \dots, N_n jejich nominále.¹¹⁴

¹¹⁰ Jako forwardová sazba se též označují sazby sjednané v rámci derivátových kontraktů FRA. V nich jedna strana v budoucnu platí dnes sjednanou sazbu a druhá strana platí v budoucnu aktuální sazbu mezibankovního trhu. Zde představená metoda Fama-Bliss informace z kótací FRA instrumentů nevyužívá.

¹¹¹ Dluhopisy s proměnlivým kupónem lze z hlediska úrokového rizika považovat za dluhopis se splatností rovnou příštímu okamžiku přecenění. Z hlediska kreditního rizika je však proměnlivě úročený dluhopis rizikovější, tudíž toto ztotožnění by vedlo k příliš vysoké spotové sazbě, a bylo by proto značně distorzní.

¹¹² Chování dluhopisů těsně před splatností není vždy regulární. Proto jsou dluhopisy těsně před splatností z konstrukce křivek vyřazovány (např. BIS 2005), kdy minimální hranice je až 1 rok.

¹¹³ Přítomnost opcí – např. právo *emitenta* na předčasné splacení, nebo právo *investora* na předčasné splacení, příp. různá práva na výměnu za jiný instrument – má vliv na cenu dluhopisu. Pro korektní ocenění dluhopisu samotného by tak bylo třeba odečítat ceny těchto opcí, což není vždy jednoduché a přesné.

¹¹⁴ Uvedená charakterizace předpokládá, že periodičita kupónových sazeb či kupónová sazba se nemění dnes známým způsobem během životnosti dluhopisu. Vymezení by šlo ovšem modifikovat, i pokud by

3. Forwardová sazba f_1 pro horizont až do splatnosti prvního dluhopisu (tj. T_1) se vypočte ze vzorce

$$P_1 = \frac{N_1}{(1+f_1)^{T_1}} + \sum_{i=1}^{d_1} \frac{\frac{c_1}{\tau_1} \cdot N_1}{(1+f_1)^{T_1 - \frac{i-1}{\tau_1}}}, \quad [1]$$

kde d_1 je počet zbývajících kupónových plateb (včetně té placené až spolu s nominále), který lze vypočítat zaokrouhlením dolů výrazu T_1/τ_1 . První sčítanec na pravé straně rovnice [1] odpovídá současné hodnotě nominále. Druhý sčítanec na pravé straně rovnice [1] odpovídá součtu současných hodnot jednotlivých kupónů.

4. Spotová sazba vyjádřená jako funkce splatnosti $S(t)$, tj. roční sazba platná na t let, je na tomto splatnostním úseku totožná s forwardovou sazbou, tj.

$$S(t) = f_1, \quad \text{pro } t \leq T_1 \quad [2]$$

5. Následně se postupuje od krátkodobějších dluhopisů k dlouhodobějším. Obecně se forwardová sazba f_k pro horizont mezi splatnostmi $k-1$ -tého (tj. T_{k-1}) a k -tého dluhopisu (tj. T_k) vypočte z rovnice [3].

$$P_k = \frac{N_k}{(1+S(T_{k-1}))^{T_{k-1}} \cdot (1+f_k)^{T_k-T_{k-1}}} + \sum_{i=1}^{d_k} \frac{\frac{c_k}{\tau_k} \cdot N_k}{(1+S(T_{k-1}))^{T_{k-1}} \cdot (1+f_k)^{T_k-T_{k-1}-\frac{i-1}{\tau_k}}}, \quad [3]$$

$$+ \sum_{i=1}^{e_k} \frac{\frac{c_k}{\tau_k} \cdot N_k}{\left(1+S\left(T_k - \frac{d_k-1-i}{\tau_k}\right)\right)^{T_k - \frac{d_k-1-i}{\tau_k}}}$$

kde e_k je počet zbývajících kupónových plateb, které nastávají dříve, než za T_{k-1} let, tedy je možné jejich současnou hodnotu spočítat s využitím již vypočtených spotových sazeb. d_k je počet zbývajících kupónových plateb, které nastávají až po okamžiku T_{k-1} , tudíž jejich současná hodnota je neznámá. Počet e_k lze získat zaokrouhlením dolů výrazu T_{k-1}/τ_k , a hodnotu d_k zaokrouhlením dolů výrazu T_k/τ_k a odečtením čísla e_k .

toto neplatilo; nicméně se jedná o velmi řídké případy, které nejsou relevantní pro ČR. Máme-li k dispozici údaje o tržních cenách v % nominále, jak se běžně uvádějí, je užitečné počítat s fiktivním nominále 100 peněžních jednotek.

6. Spotová sazba vyjádřená jako funkce splatnosti $S(t)$ se na tomto úseku vypočte jako

$$S(t) = \left((1 + S(T_{k-1}))^{T_{k-1}} \cdot (1 + f_k)^{t-T_{k-1}} \right)^{1/t} - 1, \quad \text{pro } T_{k-1} < t \leq T_k \quad [4]$$

7. Kroky 5. a 6. se opakují pro každý dluhopis, až dokud $k = n$.
8. Spotová sazba vyjádřená jako funkce splatnosti $S(t)$ se pro splatnostní úsek přesahující splatnost nejdélehodobějšího dluhopisu vypočte s užitím poslední spočtené forwardové sazby f_n . Předpokládá se tedy, že tato forwardová sazba platí až do nekonečna.

$$S(t) = \left((1 + S(T_n))^{T_n} \cdot (1 + f_n)^{t-T_n} \right)^{1/t} - 1, \quad \text{pro } T_n < t \quad [5]$$

Výsledkem výpočtu je spotová křivka $S(t)$, která je definována pro každou splatnost t a na rozdíl od forwardových sazeb je spojitá. Tato spotová křivka může být užita pro diskontování peněžních toků z oceňovaného aktiva bezrizikovou mírou. Případně lze tuto spotovou křivku převést na jednoleté forwardové sazby odstupňované po celých letech, které jsou z této křivky odvozeny, tj.

$$F(t) = \begin{cases} S(1) & t = 1 \\ \frac{(1 + S(t))^t}{(1 + S(t-1))^{t-1}} - 1 & t = 2, 3, \dots \end{cases} \quad [6]$$

Výhoda ročních forwardových sazeb oproti forwardovým sazbám užitým při konstrukci spotové křivky (f) spočívá v jejich určité vyhlazenosti na splatnostním segmentu křivky, ve kterém je k dispozici více obchodovaných dluhopisů. Pokud totiž v ročním úseku dochází splatnosti více dluhopisů, dojde ke zprůměrování několika kratších forwardových sazeb.¹¹⁵

4.4 Numerický příklad pro Českou republiku

Obecná prezentace metody v předchozí kapitole může snižovat přehlednost. Proto metodu demonstrujeme na skutečném příkladu českých státních dluhopisů. Kromě ilustrace postupu ukážeme nespojitost forwardové sazby. K otázce míry nespojitosti forwardových sazeb se krátce vyjádříme v kapitole 4.5.

Využijeme data zveřejněná MtS Czech Republic pro středu 12. 8. 2015.¹¹⁶ Výhodou zdroje je, že (1) jde o skutečně obchodovatelné kótace k 11.00 hodin příslušného dne, že (2) přes obchodní platformu MtS probíhá značná část obchodů na trhu a rovněž (3) bezplatná veřejná přístupnost databáze. Z 22 dostupných dluhopisů je vyřazeno 5 dluhopisů s proměnlivým výnosem.¹¹⁷ Důležité údaje pro zbývajících 17 dluhopisů ($n=17$) jsou ukázány v Tab. 4.1. Všechny tyto dluhopisy mají roční frekvenci výplaty kupónů ($\tau_1 = \tau_2 = \dots = \tau_{17} = 1$). Všechny mají rovněž

¹¹⁵ Navíc roční frekvence dokáže mírně rozrušit neměnnou výši forwardové sazby v intervalu mezi splatnostmi, protože části intervalu budou spadat do odlišných let.

¹¹⁶ <https://www.mtsdata.com/content/data/public/cze/fixing/index.php>

¹¹⁷ Někteří autoři doporučují automaticky vyřadit dluhopisy na krátkém konci výnosové křivky, jejichž tržní ceny (a výnosy) jsou zkresleny blížíci se splatností. Bývají vyřazovány dluhopisy se zbytkovou splatností kratší než měsíc, 3 měsíce, nebo i 1 rok (BIS, 2005). Protože se článek zabývá středně a dlouhodobými výnosy a metoda Fama-Bliss eliminuje chyby v ocenění v období po splatnosti prvního korektně oceněného dluhopisu, toto vyřazování zde neprovádíme.

identické nominále výši 10 000 CZK. Pro jednoduchost ale budeme předpokládat, že nominále je 100 CZK, aby kótace, které jsou standardně udávány v procentech jmenovité hodnoty (sloupce 5-7 Tab. 1), představovaly přímo cenu dluhopisu.

Tab. 4.1 Dluhopisová data pro 12. srpen 2015

<i>k</i>	ISIN	Popis	Zbytková splatnost (roky, T_k)	Kótace bid	Kótace ask	Kótace střed	Kupónová sazba (% , c_k)	Naběhlý úrok při $N = 100$ (AI_k)	Cena dluhopisu při $N = 100$ (P_k)
1	CZ0001000749	CZGB 6.95 26/01/16	0,46	103,10	103,43	103,27	6,95	3,78	107,05
2	CZ0001003842	CZGB 0.500 28/07/16	0,96	100,54	100,67	100,60	0,50	0,02	100,62
3	CZ0001001903	CZGB 4.000 11/04/17	1,66	106,83	107,02	106,93	4,00	1,34	108,27
4	CZ0001004246	CZGB 0.850 17/03/18	2,60	102,04	102,23	102,14	0,85	0,34	102,48
5	CZ0001000822	CZGB 4.60 18/08/18	3,02	113,59	113,75	113,67	4,60	4,52	118,19
6	CZ0001002471	CZGB 5.000 11/04/19	3,66	117,69	117,92	117,81	5,00	1,68	119,49
7	CZ0001003834	CZGB 1.500 29/10/19	4,21	105,63	105,88	105,76	1,50	1,18	106,93
8	CZ0001001317	CZGB 3.75 12/09/20	5,08	117,84	118,15	118,00	3,75	3,44	121,43
9	CZ0001002851	CZGB 3.850 29/09/21	6,13	121,46	121,83	121,65	3,85	3,35	124,99
10	CZ0001001945	CZGB 4.700 12/09/22	7,08	129,25	129,67	129,46	4,70	4,31	133,77
11	CZ0001002547	CZGB 5.700 25/05/24	8,79	142,99	143,60	143,30	5,70	1,22	144,52
12	CZ0001004253	CZGB 2.400 17/09/25	10,10	114,89	115,49	115,19	2,40	2,17	117,36
13	CZ0001004469	CZGB 1.000 26/06/26	10,87	100,52	101,17	100,85	1,00	0,13	100,97
14	CZ0001003859	CZGB 2.500 25/08/28	13,04	114,62	115,26	114,94	2,50	2,41	117,35
15	CZ0001004477	CZGB 0.950 15/05/30	14,76	93,57	94,43	94,00	0,95	0,23	94,23
16	CZ0001001796	CZGB 4.20 04/12/36	21,31	141,16	142,55	141,85	4,20	2,89	144,75
17	CZ0001002059	CZGB 4.850 26/11/57	42,29	159,10	164,00	161,55	4,85	3,45	165,00

Zdroj: MtS Czech Republic, výpočty autora.

Uváděné kótace představují tzv. čistou cenu. Abychom získali skutečnou (neboli „hrubou“) cenu v transakci s dluhopisem, musíme k čisté ceně přičíst naběhlý úrok (neboli alikvótní úrokový výnos). Dekompozice této ceny na čistou cenu a naběhlý úrok zajistí, že čistá cena je (téměř) imunní vůči změně hodnoty dluhopisu v čase¹¹⁸, tj. že se vyvíjí pouze se změnou úrokových sazeb. Skutečná cena se v našem případě dluhopisů s roční výplatou kupónu vypočte jako¹¹⁹

$$P_k = Q_k \cdot N_k + AI_k = Q_k \cdot N_k + c_k \cdot N_k \cdot (T_k - \lfloor T_k \rfloor), \quad [7]$$

¹¹⁸ Každým dnem klesá doba do obdržení peněžních toků, a tedy roste cena dluhopisu. Po obdržení kupónu (lépe řečeno po rozhodném dni pro nárok na kupón) cena dluhopisu poklesne o hodnotu kupónu. Tyto efekty zachycuje právě komponenta skutečné ceny zvaná naběhlý úrok.

¹¹⁹ V rovnici [7] a numerickém příkladu je pro jednoduchost abstrahováno od možností, že (1) se okamžik výplaty kupónu neshoduje s rozhodným dnem pro nárok na kupón a (2) že vypořádání transakcí s dluhopisy není okamžité.

kde Q_k je kótace ceny dluhopisu (v % jmenovité hodnoty) a AI_k jeho naběhlý úrok spočtený jako velikost kupónu vynásobená částí úrokového období (zde jeden rok), která již uběhla od poslední výplaty kupónu. $\lfloor \cdot \rfloor$ značí zaokrouhlení hodnoty na nejbližší celé číslo směrem dolů.

Vycházíme-li ze středu cenových kótací, tj. sloupce 7 Tab. 4.1, které jsou průměrem kótace bid a kótace ask, skutečná cena nejkratšího dluhopisu ($k = 1$) je

$$P_1 = 103,27 + 6,95 \cdot (1 - 0,46) = 103,27 + 3,753 = 107,023, \quad [8]$$

pro druhý nejkratší dluhopis ($k = 2$)

$$P_2 = 100,60 + 0,50 \cdot (1 - 0,96) = 100,60 + 0,02 = 100,62, \quad [9]$$

atd. Hodnoty z výpočtů [8] a [9] nemusí plně odpovídat hodnotám v posledních dvou sloupcích Tab. 4.1 kvůli zaokrouhlování.

Nyní jsou připraveny všechny údaje pro konstrukci výnosové křivky metodou Fama-Bliss (krok 1 postupu). Dluhopisy jsou již seřazeny vzestupně podle splatnosti (krok 2 postupu). Nyní použijeme první dluhopis ($k = 1$). Forwardová sazba, aplikovaná na všechny jeho peněžní toky, která zajistí, že současná hodnota dluhopisu se rovná jeho skutečné tržní ceně, se vypočte jako:

$$\frac{100}{(1 + f_1)^{0,46}} + \frac{0,0695 \cdot 100}{(1 + f_1)^{0,46}} = 107,05. \quad [10]$$

To vede k hodnotě forwardové sazby $f_1 = -0,203\%$ (krok 3 postupu) na splatnostním intervalu od 0 do $T_1 = 0,46$ roku. Tato forwardová sazba umožní sestavit první úsek spotové křivky (krok 4 postupu), a sice ve stejné výši, tj.

$$S(t) = -0,203\%, \quad \text{pro} \quad t \leq 0,46. \quad [11]$$

Nyní přejdeme k druhému nejkratšímu dluhopisu ($k = 3$). Tento dluhopis má již pouze jednu zbývající výplatu peněžního toku - v okamžiku své splatnosti. Pro tento okamžik nemáme k dispozici příslušnou hodnotu spotové sazby k jeho diskontování (protože $T_1 = 0,46 < T_2 = 0,96$). Hodnota forwardové sazby, platné od okamžiku $T_1 = 0,46$ až do okamžiku $T_2 = 0,96$, která zajistí, že současná hodnota dluhopisu se rovná jeho skutečné tržní ceně, se vypočte jako:

$$\frac{100}{(1 + S(0,46))^{0,46} \cdot (1 + f_2)^{0,96-0,46}} + \frac{0,005 \cdot 100}{(1 + S(0,46))^{0,46} \cdot (1 + f_2)^{0,96-0,46}} =$$

$$\frac{100}{(1 - 0,00203)^{0,46} \cdot (1 + f_2)^{0,96-0,46}} + \frac{0,005 \cdot 100}{(1 - 0,00203)^{0,46} \cdot (1 + f_2)^{0,96-0,46}} = 100,62 \quad [12]$$

To vede k hodnotě $f_2 = -0,052\%$. Informace bude využita k prodloužení spotové křivky pro splatnosti $T_1 = 0,46$ až $T_2 = 0,96$ pomocí vzorce

$$S(t) = \left((1 - 0,00203)^{0,46} \cdot (1 - 0,00052)^{t-0,46} \right)^{1/t} - 1, \quad \text{pro} \quad 0,46 < t \leq 0,96 \quad [13]$$

Například $S(0,96) = -0,124$ %. Lze si všimnout, že tento úsek spotové křivky již není konstantní. Protože pro $t = 0,46$ vede rovnice [13] k $S(t) = -0,203$ %, je spotová křivka spojitá. Jinými slovy, plynule navazuje na svůj předchozí segment.

Ještě ukážeme výpočet pro třetí nejkratší dluhopis ($k = 3$). Tento dluhopis má dvě zbývající výplaty peněžního toku – kupón za 0,34 roku a kupón a jmenovitou hodnotu v okamžiku splatnosti za 1,34 roku. První platbu dokážeme ocenit s pomocí již známého úseku spotové křivky. Druhou ovšem nikoli. Neznámou je zde forwardová sazba platná od okamžiku od okamžiku $T_2 = 0,96$ až do okamžiku $T_3 = 1,34$, která zajistí, že současná hodnota dluhopisu se rovná jeho skutečné tržní ceně.

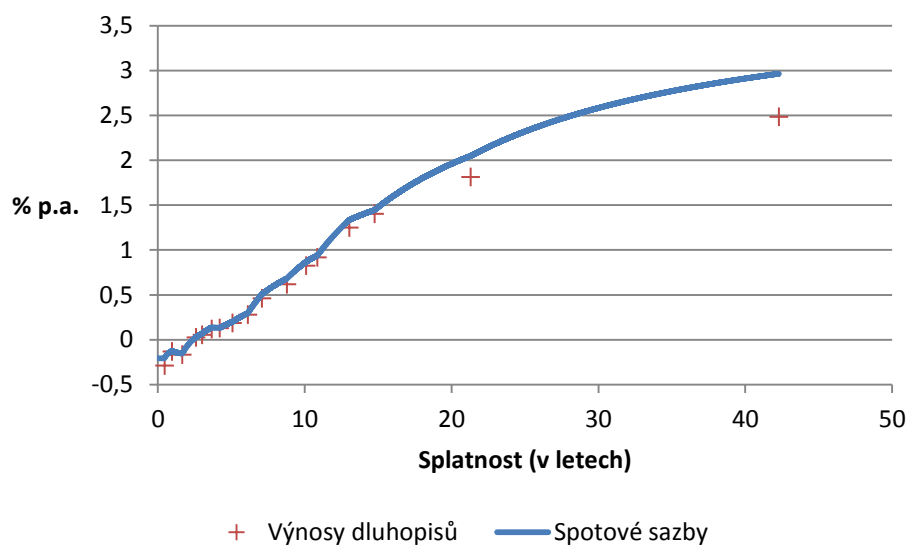
$$\begin{aligned} & \frac{100}{(1 + S(0,96))^{0,96} \cdot (1 + f_3)^{1,34-0,96}} + \frac{0,04 \cdot 100}{(1 + S(0,96))^{0,96} \cdot (1 + f_3)^{1,34-0,96}} + \\ & + \frac{0,04 \cdot 100}{(1 + S(0,34))^{0,34}} = \frac{100}{(1 - 0,00124)^{0,96} \cdot (1 + f_3)^{1,34-0,96}} + \quad [14] \\ & + \frac{0,04 \cdot 100}{(1 - 0,00124)^{0,96} \cdot (1 + f_3)^{1,34-0,96}} + \frac{0,04 \cdot 100}{(1 - 0,00203)^{0,34}} = 108,27 \end{aligned}$$

Řešením oceňovací rovnice je $f_3 = -0,361$ %. To umožní prodloužit spotovou křivku na úseku $T_2 = 0,96$ až $T_3 = 1,34$ pomocí vztahu.

$$S(t) = \left((1 - 0,00124)^{0,96} \cdot (1 - 0,00361)^{t-0,96} \right)^{1/t} - 1, \quad \text{pro } 0,96 < t \leq 1,34 \quad [15]$$

Pro ostatní dluhopisy by se postupovalo obdobně. Výsledná spotová křivka je znázorněna na Obr. 4.1. Tvar spotové křivky věrně kopíruje výnosy do doby splatnosti použitých dluhopisů, byť zejména pro delší splatnosti se úrovně křivek rozcházejí. Tento rozdíl je známý (např. Livingston – Jain 1982) a podtrhuje důležitost užívání spotových sazeb namísto výnosů do doby splatnosti dluhopisů k diskontování peněžních toků (Mařík et al. 2011). Na Obr. 4.2 je znázorněna forwardová křivka, která byla k výstavbě spotové křivky použita. Za pozornost stojí, že sestává ze série vodorovných úseků, které na sebe nespojitě navazují. Body nespojitosti jsou splatnosti příslušných dluhopisů: všimněte si, jak body nespojitosti časově korespondují s vodorovným umístěním křížků.

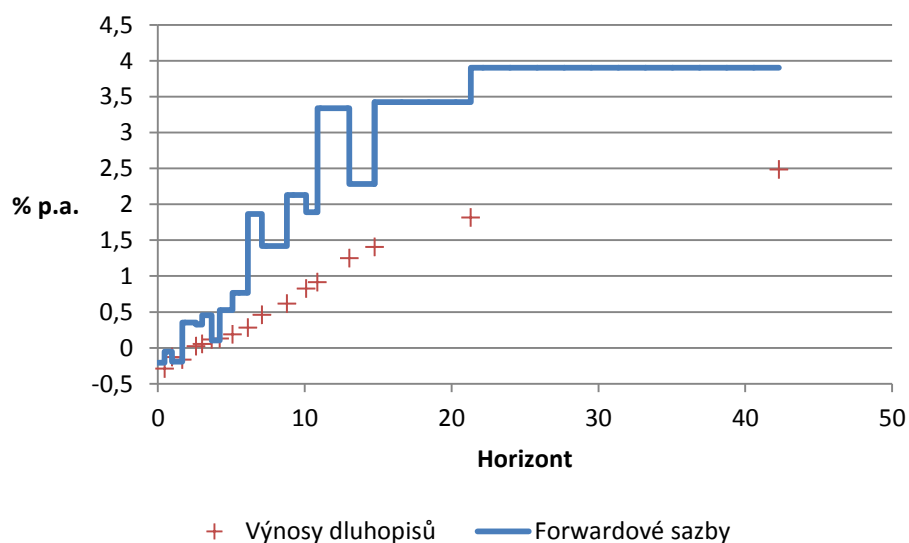
Obr. 4.1 Spotová křivka a výnosy užitých dluhopisů



Zdroj dat: MtS Czech Republic

Poznámka: Výnosy dluhopisů představují výnos do doby splatnosti státních dluhopisů s příslušnou splatností použitých při konstrukci spotové křivky, jak je uveden v databázi MtS Czech Republic.

Obr. 4.2 Forwardová křivka, ze které byla spotová křivka odvozena



Zdroj dat: MtS Czech Republic.

Poznámka: Forwardová křivka představuje anualizovanou sazbu platnou na horizontu uvedeném na vodorovné ose se splatností jeden den. Například, hodnota pro desátý rok je jednodenní (resp. okamžitá) sazba, která bude v platnosti za deset let od okamžiku konstrukce křivky (tj. 12. 8. 2015). Výnosy dluhopisů představují výnos do doby splatnosti státních dluhopisů s příslušnou splatností použitých při konstrukci spotové křivky, jak je uveden v databázi MtS Czech Republic.

4.5 Charakterizace metody Fama-Bliss ve srovnání s alternativami

V přechodí kapitole byl zevrubně popsán výpočetní postup metody Fama-Bliss. Se znalostí výpočetního postupu přistupme k popisu jejích charakteristických vlastností.

1. **Užitý předpoklad o chování forwardové křivky je nejjednodušší možný.** Pokud bychom přemýšleli, jaký předpoklad použít, neexistuje jednodušší, neutrálnější a univerzálnější předpoklad, než je právě konstantnost forwardových sazeb. Tím je tento předpoklad přitažlivý. Analogický postup byl volen v článku Dvořák (2014) pro konstrukci spotové výnosové křivky z úrokových swapů pro splatnosti, jejichž kótace není na trhu k dispozici.¹²⁰ Jak již bylo zmíněno, je rovněž volen v řadě dalších prací z oblasti finanční ekonomie.
2. **Užitý postup je jednoznačný.** Postup představený v kapitole 4.2 je jednoznačný, co se týče jednotlivých kroků. Pokud jej budou aplikovat různí analytici, mající k dispozici stejná data, dospějí k totožným výsledkům. V tom se metoda liší od metod NSS, kde se nabízí volba optimalizačního kritéria (součet cenových versus součet výnosových odchylek; Svensson 1994, Hladíková – Radová 2012), způsobu optimalizace (metoda nejmenších čtverců; metoda maximální věrohodnosti; Schich 1997); a dále mechanismus numerické optimalizace a volba výchozího bodu po optimalizaci (různé hodnoty dávají různé výsledky; Slavík, 2001). Dále je otázkou, zda volit specifikaci Nelson-Siegel nebo Svensson, případně specifikaci s ještě vyšším počtem parametrů. Nastává rovněž otázka, zda předem omezit některé parametry odhadovaných funkcí, aby metoda dospěla vždy k ekonomicky rozumným výsledkům¹²¹. BIS (2005) přináší názorný přehled diverzity nastavení modelů, které pro konstrukci výnosových křivek využívají hlavní centrální banky. Pokud místo NSS volíme další z oblíbených metod – vyrovnávací spliny (Fisher et al. 1995 nebo Waggoner 1997) – je otázkou stupeň splinu (tj. derivace kterého řádu ještě mají být spojité, byť zde víceméně panuje empirický konsenzus na kubických splinech; BIS 2005) a otázka parametru míry vyrovnání (volba mezi vyšší hladkostí výsledné funkce a kvalitou proložení), případně způsob jeho diferenciaci podle segmentu výnosové křivky (Waggoner 1997). Afinní modely (Vasicek 1977 nebo Ho – Lee 1986) zase vyžadují specifikaci procesu, podle kterého se budou v budoucnu vyvíjet krátkodobé sazby.

Je tedy patrné, že všechny ostatní metody kromě Fama-Bliss jsou svou specifikací ne zcela jednoznačné. Samozřejmě lze u těchto metod lze vyvinout technický standard, který poskytne jednoznačný návod na volbu příslušných parametrů. Takový návod ovšem bude do značné míry arbitrární, a tedy umělý. U metody Fama-Bliss tento problém zcela odpadá. Je jasné, že Famou a Blissem předpokládaný skokový průběh forwardové funkce (viz Obr. 4.2) není realistický. Otázka, **jak** by tento průběh měl vypadat, je ovšem nevyhnutelně subjektivní a různí analytici by dospěli k různým názorům. Má-li být ocenění jednoznačné (objektivizované), je

¹²⁰ Pravidelně aktualizované bezrizikové výnosové míry získané z úrokových swapů konstruované tímto přístupem jsou volně ke stažení na <http://iom.vse.cz/odborna-cinnost/bezrizikova-vynosnost-z-urokovych-swapu/>

¹²¹ Ekonomicky nerozumným výsledkem může být například záporná nebo velmi vysoká hodnota dlouhodobé výnosové míry vzniklá proto, že na trhu neexistuje takto dlouhodobý dluhopis, který by dokázal dlouhodobou sazbu stabilizovat na přiměřené úrovni. Zde existují různé přístupy. Německá centrální banka omezuje hodnoty některých parametrů (Schich 1997), zatímco Hladíková – Radová (2012) pro český trh hodnoty parametrů nijak neomezuje.

Fama-Bliss velmi užitečnou metodou,¹²² která může sloužit jako jakýsi benchmark pro volbu výnosové křivky.

3. **Metoda oceňuje na trhu obchodované dluhopisy konzistentně.** U všech použitých dluhopisů platí, že jejich současná hodnota vypočtená diskontováním výsledné spotové křivky je rovna jejich tržní ceně. Dluhopisy jsou tedy oceněny naprosto tržně, což je koncepčně vynikající pro tržní ocenění. Tato vlastnost není zdaleka samozřejmá. Například oblíbené metody NSS či vyrovnávací spliny toto nezaručují. Ty totiž při konstrukci křivky minimalizují chybu proložení, zároveň však kladou jistý důraz na hladkost prokládací křivky, tudíž proložení není nikdy dokonalé. Důvodem je původní účel přístupů extrahovat zejména základní informace o tvaru křivky (např. úroveň, sklon a zakřivení), protože z nich lze vyčíst tržní očekávání pro měnověpolitické účely (Svensson 1994). Ačkoli Dvořák (2014a) ukázal, že Svenssonova funkce prokládá pro Českou republiku typické tvary výnosové křivky velmi dobře, metoda, která neprokládá data dokonale, je však obhajitelná pouze tehdy, nejsou-li vstupní data dobrá, protože toto proložení umožní nekvalitu dat částečně napravit. Je však velkou (a značně subjektivní) otázkou, zda optimálním způsobem této korekce je pouze mechanicky „přefiltrovat“ tržní data Svenssonovým (nebo jakýmkoliv dalším) tvarem funkce. NSS nebo postup vyrovnávacích splinů je pro dobrý výsledek vhodné komplementovat údaji o likviditě segmentu trhu, vývoji cen a podivnostem v chování výnosové křivky a kontrolou oproti datům z minulých období. Inspirací zde může být CSRP dataset¹²³. Vývoj takové metody pro český trh nespadá do náplně tohoto článku, a je vhodným tématem na finanční výzkum. Z této krátké exkurze je však patrné, že mechanické proložení předdefinovanou křivkou není optimální. Zajímavou alternativou zde může být vyšší třída afinních modelů, která dokáže ocenit na trhu obchodované dluhopisy konzistentně (např. Ho – Lee 1986).
4. **Metoda je výpočetně jednoduchá.** Metodu lze ve srovnání s metodami NSS, splinů a afinních modelů poměrně jednoduše implementovat. Implementaci navíc pomůže fakt, že výpočetní vzorce [1] a [3] je možné zjednodušit pomocí předpisu pro součet konečné geometrické řady. Protože se jedná o polynomy vyšších stupňů, analytické řešení nemusí existovat a je třeba se spoléhat na numerické řešení, stejně jako např. u výpočtu výnosu do splatnosti. Vzhledem k vyspělosti současné výpočetní techniky však toto není překážkou. Oproti tomu implementace metod NSS, splinů či afinních modelů vyžaduje dedikovaný software s příslušnými programovými balíčky nebo znalost postupů numerické optimalizace.
5. **Metoda není robustní vůči chybám v cenách dluhopisů.** Jak již bylo zmíněno v bodě 3, metoda zajistí, aby se současné hodnoty dluhopisů rovnaly jejich tržním cenám. Pokud je údaj o tržní ceně špatný (ve smyslu neodůvodněně nízký či vysoký), projeví se tento charakter v neúměrně

¹²² Je třeba zmínit, že existují přístupy, které výnosové křivky získané metodou Fama-Bliss dále upravují (tzv. smoothed Fama-Bliss). Tyto úpravy mají za cíl zvýšit datovou kvalitu a realističnost výsledného tvaru křivky.

¹²³ <http://www.crsp.com/products/documentation/fama-bliss-discount-bonds-%E2%80%93-monthly-only>.

vysoké či naopak nízké forwardové sazby pro segment blízky jeho splatnosti (viz opět Obr. 4.2). Kolísání segmentů forwardové křivky, odvozených metodou Fama-Bliss tak může sloužit k **orientačnímu měření kvality vstupních dat**. Čím více forwardové sazby kolísají, tím horší data pravděpodobně máme k dispozici.

Do spotové křivky se pak nedokonalost vstupních dat (a tedy „kostrbatost forwardové křivky) plně přenáší, a odezní až pro segment po splatnosti následujícího dluhopisu. Zvláště nepříznivý efekt by nastal, pokud by byla zakreslena cena nejdlohodobějšího dluhopisu. Protože spotová sazba by v nekonečném horizontu konvergovala k forwardové sazbě, která byla s pomocí tohoto dluhopisu odvozena, mohlo by se stát, že by dlouhodobá spotová sazba nabývala neúměrně nízkých (i záporných) či neúměrně vysokých hodnot. Z toho plyne, že pokud máme obavy o kvalitu dlouhodobých dat, není vhodné používat metody Fama-Bliss na segmentu přesahujícím splatnost posledního dluhopisu. To je však pravdou i pro metodu NSS, kde dlouhodobá spotová sazba byla ukázána jako nezřídka ekonomicky nesmyslnou (Dvořák 2014a). Podobným problémem ostatně trpí i spliny.

Existence nereálně oceněných dluhopisů je potenciálně závažným problémem. Zvláště proto, že je v řadě případů obtížné špatně oceněné¹²⁴ dluhopisy vůbec detekovat a z konstrukce křivky vyřadit (nebo jejich výnos korigovat). Velmi často jediným indikátorem nekvality dat je tak vysoké kolísání forwardových sazeb. Protože nevíme, které z dluhopisů jsou oceněné špatně, bývají voleny různé přístupy, které výslednou křivku automaticky vyhlazují. Největší význam toto vyhlazení má, pokud existuje více dluhopisů podobné splatnosti, u kterých i malé rozdíly ve výnosech způsobí neúměrně velké kolísání forwardových sazeb při metodě Fama-Bliss. Český trh s poměrně malým počtem obchodovaných emisí je v tomto ohledu pro metodu Fama-Bliss příznivější než americký, britský či německý.

Srovnání metody Fama-Bliss s dalšími hlavními metodami konstrukce výnosové křivky v uvedených dimenzích je názorně shrnuto v Tab. 4.2.

Tab. 4.2 Výhody a nevýhody hlavních metod konstrukce výnosové křivky

Metoda	Konzistence ocenění	Zásahy uživatele do konstrukce křivky	Vyhlazení nepřesností	Implementační náročnost
Fama-Bliss (1987)	Ano	Žádné	Žádné	Snadná
Nelson-Siegel (1987) a Svensson (1994)	Ne	Optimalizace cenové nebo výnosové odchylky, numerická metoda optimalizace, omezení na velikosti parametrů	Automatické vyhlazení regresí	Středně obtížná
Interpolační spliny	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů, předpoklad na některé parametry ¹²⁵	Žádné; chování mimo uzlové body ovšem zveličuje nepřesnosti	Středně obtížná

¹²⁴ Malý objem obchodů (je-li tento údaj k dispozici) s dluhopisem může signalizovat riziko, že jeho kótovaná tržní cena nemusí být realistická, ale sám o sobě není důkazem.

¹²⁵ Pro více informací viz Pienaar – Choudhry (2002).

Regresní spliny (McCulloch 1971, 1975)	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů	Automatické vyhlazení regresí	Středně obtížná
Vyrovňovací spliny (Fisher et al 1995)	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů, parametr míry vyhlazení	Míru vyhlazení lze stanovit uživatelsky	Obtížná
VRP spliny (Waggoner 1997)	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů, funkční předpis pro parametr míry vyhlazení	Míru vyhlazení lze stanovit uživatelsky různě pro různé segmenty křivky	Obtížná
Vasicek (1977)	Ne	Charakterizace procesu pro vývoj krátkodobé sazby	Automatické vyhlazení přes hladký charakter procesu pro krátkodobou sazbu	Obtížná
Ho-Lee (1986)	Ano	Charakterizace procesu pro vývoj krátkodobé sazby	Žádné	Obtížná

Zdroj: Autor.

Poznámka: Hodnocení implementační náročnosti je založeno na úsudku autora a slouží především k porovnání implementační náročnosti přístupů mezi sebou.

4.6 Závěr

V německé a české oceňovací literatuře pro oceňování dlouhodobých aktiv se poslední dobou prosazuje model výnosové křivky Nelson-Siegel či Svensson. Modely ovšem nejsou prosty nesnáží. Jsou výpočetně nesnadné, vyžadují více či méně arbitrárně stanovovat důležité parametry výpočtu a jimi získané spotové sazby nevedou k ocenění použitých dluhopisů na přesně úrovni pozorované tržní ceny. Poslední uvedená výtka může být v mnohých případech výhodou, protože povede ke korekci zkreslených tržních cen. Pokud je ovšem cílem analytika tuto korekci provést, měl by využít výrazně pokročilejší analytické nástroje užívající data o likviditě instrumentu nebo splatnostního segmentu výnosové křivky, tvaru křivky v daném okamžiku a jejím vývoji v čase. Spoléhání se na automatické vyhlazení metodou Nelson-Siegel-Svensson není zdaleka dostatečné. Jiné přístupy, např. přístup vyrovnávacích splinů či afinních modelů, rovněž nejsou prosty problémů.

Určité východisko z těchto potíží nabízí metoda Fama-Bliss. Ta předpokládá, že forwardové sazby jsou mezi splatnostmi na trhu obchodovaných instrumentů konstantní. Metoda je výpočetně jednoduchá, jednoznačná a vede ke konzistentnímu ocenění dluhopisů. I když předpoklad po částech konstantní forwardové sazby není dokonalý z hlediska realističnosti, neutrálnost, univerzálnost a srozumitelnost předpokladu metodu předurčuje do role benchmarkové metody, se kterou se ostatní metody mohou porovnávat. Zvláště užitečná je proto v **tržním nebo objektivizovaném ocenění**.

Výše řečené ovšem nebrání vývoji dokonalejších modelů výnosových křivek, které dokáží lépe korigovat nedokonalosti v dluhopisových datech a povedou k realističtějšímu tvaru výnosové křivky. Jiné aplikace výnosových křivek, např. pro oceňování derivátů, extrakce tržních očekávání či prognózu vývoje úrokových měr pak vyžadují jiné přístupy, a metoda Fama-Bliss u nich není vhodná.

Literatura

- [1] Adrian, T. – Crump, R. K. – Moench, E. (2008). *Pricing the Term Structure with Linear Regressions*. Federal Reserve Bank of New York Staff Report No. 340. Revised April 2013.
- [2] Bank on International Settlements (2005). *Zero-coupon yield curves: technical documentation*. BIS Papers No. 25.
- [3] Bloomberg (2009). Building the Bloomberg Interest Rate Curve – Definitions and Methodology. September 2009.
- [4] Damodaran, A. (2008). *What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block*. Stern School of Business, New York University. [cit. 7.7.2013] Dostupné na: <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf>.
- [5] Diebold, F. X. – Li, C. (2006). *Forecasting the term structure of government bond yields*. Journal of Econometrics 130, 337-364.
- [6] Dvořák, M. (2014). Užití swapových sazeb pro stanovení bezrizikové míry se zřetelem na Českou republiku. *Oceňování* 7, 1, 3-26.
- [7] Dvořák, M. (2014a). Bezriziková míra ze státních dluhopisů: přednosti a úskalí Svenssonovy metody. *Oceňování* 7, 3, 3-28.
- [8] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) (2016). Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures. 30 May 2016. Frankfurt: EIOPA.
- [9] Fama, E. F. – Bliss, R. R (1987). *The Information in Long-Maturity Forward Rates*. American Economic Review 77, 4, 680-692.
- [10] Fisher, M. – Nychka, D. – Zervos, D. (1995). *Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines*. Finance and Economics Discussion Series Working Paper No. 95-1, Federal Reserve Board.
- [11] Gilli, M. – Grosse, S. – Schumann, E. (2010). *Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model*. Comisef Working Paper 031. [cit. 31.7.2014]. Dostupné z <http://comisef.eu/files/wps031.pdf>
- [12] Hanzal, M. (2015). *Bezriziková úroková míra se zaměřením na Svenssonovu metodu*. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví.
- [13] Ho, T. S. Y., Lee, S. B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, *Journal of Finance*, 41, 5, 1011–1029.
- [14] Hordahl, P. – Tristiani, O. – Vestin, D. (2004). *A joint econometric model of macroeconomic and term structure dynamics*. ECB Working Paper Series No. 405.
- [15] Hladíková, H. – Radová, J. (2012). *Term Structure Modelling by Using Nelson-Siegel Model*. *European Financial and Accounting Journal* 7,2, 36-55.
- [16] Jeffrey, A. – Linton, O. – Nguyen, T. (2006). *Flexible Term Structure Estimation: Which Method is Preferred?* *Metrika*, 63, 1, 99-122.
- [17] Kim, D. H. – Orphanides, A. (2007). The bond market term premium: what is it, and how can we measure it? *BIS Quarterly Review*, June 2007.

- [18] Kladívko, K. (2010). *The Czech Treasury Yield Curve from 1999 to the Present*. Czech Journal of Economics and Finance 60, 4, s. 307-335.
- [19] Koopman, S. J., – Mallee, M. I. P. – Van der Wel, M. (2010). *Analyzing the Term Structure of Interest Rates Using the Dynamic Nelson–Siegel Model With Time-Varying Parameters*. Journal of Business & Economic Statistics 28, 3, 329-343.
- [20] Livingston, M. – Jain, S. (1982). *Flattening of Bond Yield Curves for Long Maturities*. Journal of Finance 37, 1, 157-167.
- [21] Ludvigson, S. C. – Ng, S. (2009). Macro factors in Bond Risk Premia. Review of Financial Studies 22, 12, 5027-5067.
- [22] Maříková, P. – Mařík, M. (2012). *Odvozování bezrizikové výnosové míry z tržních dat pomocí Svenssonovy metody*. Odhadce a oceňování majetku 4/2012, s. 67-79.
- [23] Mařík, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: Hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.
- [24] Mařík, M. et al. (2011a). *Metody oceňování podniku: Proces ocenění, základní metody a postupy*. 3. upravené a rozšířené vydání. Praha: Ekopress.
- [25] Nelson, C. R. – Siegel, A. F. (1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Journal of Business 60, 473-489.
- [26] Pienaar, R. – Choudhry, M. (2002). *Fitting the Term Structure of Interest Rates Using the Cubic Spline Methodology*. In: Fabozzi, F. J. (ed). Interest Rate, Term Structure, and Valuation Modeling. Hoboken: John Wiley and Sons.
- [27] Pribsch, M. A. (2013). *Computing Arbitrage-Free Yields in Multi-Factor Gaussian Shadow-Rate Term Structure Models*. Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series No. 2013-63.
- [28] Schich, S. T. (1997). *Estimating the German term structure*. Discussion paper 4/97. Frankfurt Am Main: Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank.
- [29] Slavík, M. (2001). Odhad časové struktury úrokových sazeb z cen domácích dluhopisů. Finance a úvěr, 51,11, 591-606.
- [30] Svensson, L. E. O. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. Seminar Paper No. 579. Stockholm: Institute for International Economic Studies, University of Stockholm.
- [31] Vasicek, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5, 177–188.
- [32] Waggoner, D. F. (1997). *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper No. 97-10.

Kapitola 5

Measuring Yields: Arithmetic, Geometric, and Horizon-Consistent Average

Abstrakt

The choice of averaging method has considerable impact on the average yield of a financial variable. Usually, geometric average is preferred, though dissenting opinions exist. Here it is shown the problem has a consistent solution, which is called the horizon-consistent average. It is shown why geometric and arithmetic average calculations are almost always biased. When using company valuation's most common SP500 dataset by Ibbotson Associates for 1928-2012 and the recommended 10-year forecasting horizon, consistent with the 10-year government securities in a CAPM model, the arithmetic average is severely flawed. On the other hand, the geometric average for similar horizons does not deviate much from the horizon-consistent average.

5.1 Introduction

Using this journal as a reference, most analyses of financial instruments return concentrate on investigating short-and medium-term performance (Dariusz 2013, Kavker – Festic 2011, Trešl – Blatná 2007, Bemereu 1999, Trešl 1999). This does not mean long-term performance is of lesser importance or free of dispute. In this article, we focus on one unresolved aspect in longer-term performance evaluation and forecasting – the proper averaging method for yield measurement.

The choice of averaging method has potentially considerable effect on the value of the average yield of a financial instrument. The question is relevant in all situations where multi-period yield measurement, benchmarking or forecasting are conducted. This includes financial risk management, performance of mutual funds and estimation of cost of equity capital, to name a few. The impact of method choice is amplified when longer horizon is considered. As company valuation usually expects companies to live over a prolonged period of time, the problem is disproportionately significant there. For this reason, this problem will be exposed from valuation perspective.

Company valuation employs CAPM-style models to determine the cost of capital. Equity premium inside CAPM is defined as the difference between a yield of market index and a yield of a risk free instrument. To evaluate each of these, geometric average of past data is usually preferred, though dissenting opinions exist and the issue is not resolved satisfactorily (Mařík et al. 2011, p. 312). Damodaran (2013b) favours geometric average on the grounds of negative

autocorrelation and forecasting horizon differences, using the conclusions by Indro – Lee (1997). Nevertheless, the conclusions lack sound theoretical backing.

In this article, we start with an intuitive view of yield measures and develop a general procedure that is in accord with this view. The procedure is later referred to as horizon-consistent average. The solution is inferred under the independence of yields in time, which eases the exposition. The procedure can be further modified to account for autocorrelated yields. Making it a benchmark, respective biases of arithmetic and geometric average are investigated.

As an application, the averages are demonstrated on company valuation’s most frequently used dataset of SP500 by Ibbotson Associates for 1928-2012.

5.2 How much do the averages differ?

It is a well-known mathematical fact that for any given numbers, arithmetic average is greater than geometric average.¹²⁶ There is a single exception; both averages are equal if and only if all averaged numbers are identical. The greater is the difference between the numbers, the greater is the difference between their averages. Differences between the numbers can be measured by their standard deviation. Because stock yields exhibit higher standard deviation (in time) than less risky government securities, the difference between averages is greater in the case of SP500 stock index than in the cases of Treasury Bonds and Treasury Bills. This is shown in Table 5.1.

Tab. 5.1 Comparison of the differences between arithmetic and geometric averages for variously volatile US instruments

	Volatility (standard deviation)	Arithmetic average	Geometric average	Difference between averages
SP500 stock index	19.89%	11.26%	9.31%	1.95 p. p.
10-year T-Bonds	7.69%	5.38%	5.11%	0.27 p. p.
3-month T-Bills	3.03%	3.61%	3.57%	0.04 p. p.

Data source: Damodaran (2013).

Note: Annual data for 1928-2012 period. Geometric average is defined by (33).

The difference between averages is rather small for government securities, but for stock index it is large enough to have practical consequences.

5.3 The setup

The reason for averaging past data can be either backward looking need to describe past development or forward looking need to forecast future movement. Though everything stated in the text is valid for both cases¹²⁷, we will discuss the issue from the forecasting perspective in

¹²⁶ The proof for 2-number case is straightforward. General proof can be obtained by mathematical induction. (Vesely 2004, s. 30-31). Cauchy’s induction proof together with 4 other proofs is also available on the devoted Wikipedia website (http://en.wikipedia.org/wiki/Inequality_of_arithmetic_and_geometric_means).

¹²⁷ When looking backwards, N should be called *relevant period* rather than *forecasting horizon*.

order to be consistent with our valuation application. When estimating yields, two characteristics enter the analysis.

- **Number of observations** (denoted T). It refers to the size of the dataset of past data available. In our application to annual yields during the 1928-2012 period we have 85 observations ($T = 85$).
- **Forecasting horizon** (denoted N). It refers to the horizon for which the average yield is forecasted. When $N = 1$, we forecast an average yield of a financial variable from now to 1 period on. When $N = 2$, we predict an average yield of a financial variable from now to two periods on. Average yield is compound annual growth rate of the financial variable.¹²⁸ From technical reasons, forecasting horizon should be in full multiples of the frequency of observation; when using annual observations, forecasting horizon should be in full years.¹²⁹ In the text we assume annual observations.

As the number of observations is a feature of the dataset employed and forecasting horizon depends on the specific need of the user, these two parameters are independent of each other. Thus, $N = T$, $N < T$ and $N > T$ cases might well occur, though $N < T$ is probably the most common situation.

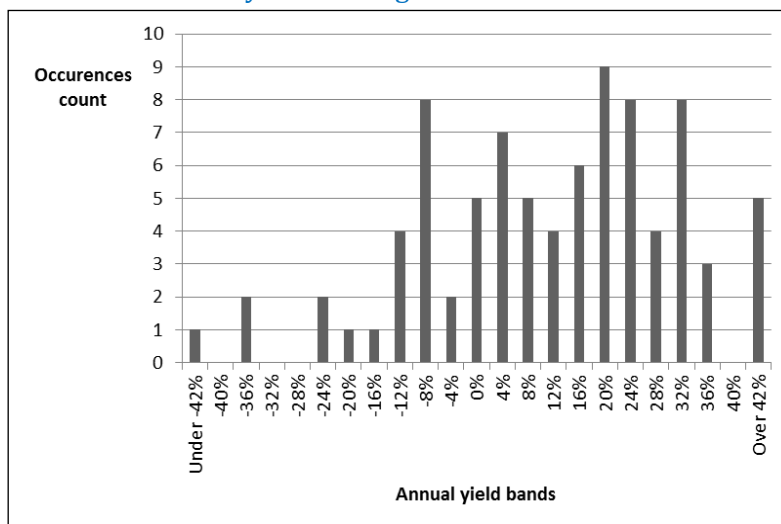
As we shall see later, the relationship between the forecasting horizon and the number of observation plays an important role when choosing the averaging method.

We begin with the distribution of historical yields of the financial variable. In our SP500 dataset by Ibbotson Associates (Damodaran, 2013), the resulting distribution's histogram is in Figure 5.1. As mentioned above, our objective is to predict future performance rather than to describe the past. The actual future performance is unknown, so we will consider it as a random variable, being probabilistically distributed according to the same distribution as occurred in the past (as in Figure 5.1). Thus, we employ past data to form an idea about probable yearly movement sizes and their likelihoods.

¹²⁸ For 2-year horizon, it is a rate g , for which $I_0 \cdot (1 + g) \cdot (1 + g) = I_2$, where I_0 is today's value of the financial variable and I_2 is its value after 2 years.

¹²⁹ Procedures and conclusions of this article can be extended to horizons which are not full multiples of the frequency of observation. Nevertheless, considering such cases – for example, estimating weekly yield when using annual data or estimating a yield for 1.384 years – makes little practical sense.

Fig. 5.1 Histogram of SP500 annual yields during 1928-2012



Data source: Damodaran (2013).

Note: Yield bands reach 2% both ways from the point stated on the horizontal axis, except for the leftmost and the rightmost band.

Two remarks should be made here. First, if all the past observations are relevant, larger number of observations delivers more proper description of the yields probability distribution. Oppositely, for example, with only 2 past data ($T = 2$), the distribution would be extremely rough and imprecise for future yield forecasting.

Second, the above was inferred under the suppositions that (1) all past yields employed in the distribution construction came from the same distribution and (2) that this yearly distribution remains unchanged for the forecasting period. If market structure has changed, yields realized under the old structure might be irrelevant for the new structure. This becomes an issue especially when trying to refine the yield distribution by extending the dataset to the past. Had stock market in 1928-1990 different yield-affecting characteristics from today's market, usage of old data can seriously impair forecasting accuracy instead of improving it.

In the following theoretical exposition is assumed all the data are relevant¹³⁰. It accord with the prevailing valuation practice (Damodaran, 2013b), it is also assumed in our SP500 application.

One-period yield distribution. Being the basic building block of the analysis, the above-mentioned yield distribution demands formal treatment. Denote one-period yield Y . From modelling perspective, it is a random variable, distributed according to some distribution, called D . Information about distribution D – its possible realizations and their respective probability of occurrence – can be derived from past data. For this purpose we can resort to the histogram in Figure 5.1. Nevertheless, the highest precision is obtained when all past observations are taken separately. This leads to the discrete probability distribution function of (1).

¹³⁰ If this proves not to be realistic, two remedies can be made. Firstly, observations identified to come from different market structures can be skipped. Secondly, data can be weighted by relevance, with more relevant data receiving higher weight, interpreted as inflated number of occurrences.

$$D: Y = \begin{matrix} x_1 & \Pr\{x_1\} = t_1/T \\ x_2 & \Pr\{x_2\} = t_2/T \\ \vdots & \vdots \\ x_k & \Pr\{x_k\} = t_k/T \end{matrix}, \quad (1)$$

where x_i denotes the i -th unique value of annual yield out of k observed t_i -times in the dataset of T values in total, leading to its respective probability of occurrence $\Pr\{x_i\}$. By the character of the setup it is very likely that almost all values will be recorded only once, leading to $t_i = 1$ and $\Pr\{x_i\} = 1/T$.

Independence assumption. If more periods are considered (in the past or in future), more random variables describing yearly changes have to be considered. Label Y_1 random variable describing first period's yield, Y_2 random variable describing yield in the second period, until Y_T is the random variable describing yield in the last considered period. In line with the previous, suppose all these random variables share the same above-mentioned distribution D . It is then important to ask if they are independent of each other. Independence of distributions in time is empirically difficult to prove or disprove. Practitioners thus resort to testing yields autocorrelation.¹³¹ Although past studies (Fama – French, 1988) identified negative autocorrelation and some theorists work with autocorrelated yields, the 1928-2012 annual SP500 dataset exhibits autocorrelations very close to zero and statistically insignificant (see Table 5.2). Therefore, in our case, serial independence of yields assumption is very reasonable. This will substantially simplify the analysis.

Tab. 5.2 Autocorrelation coefficients for annual yields of SP500

Lag	Autocorrelation coefficient (ACF)	Autocorrelation coefficient adjusted for interlaying lags (PACF)	Ljung-Box Q statistics [p-value]
1	0,0013	0,0013	0,0002 [0,990]
2	-0,1391	-0,1391	1,7247 [0,422]
3	0,0099	0,0105	1,7335 [0,630]
4	-0,0858	-0,1073	2,4059 [0,662]
5	-0,0768	-0,0756	2,9516 [0,707]
6	0,0051	-0,0240	2,9540 [0,815]
7	0,1173	0,0996	4,2592 [0,749]
8	0,0261	0,0165	4,3247 [0,827]
9	0,0948	0,1183	5,1994 [0,817]
10	0,0662	0,0697	5,6319 [0,845]

¹³¹ Independence implies autocorrelation, but not vice versa. If there is no autocorrelation, it might be due to independence, or there is a nonlinear relationship. When the independence assumption is based on zero autocorrelation, we hypothesize the first option is true.

Data source: Damodaran (2013).

Note: Annual observations for 1928-2012 period.

5.4 A generally inconsistent arithmetic-average procedure

Let us first present an appealing procedure which is justified when predicting on one horizon ($N = 1$) but turns out to be inconsistent if extended to multi-period forecasting ($N > 1$).

5.4.1 Consistent forecast for one period ($N = 1$)

One-period forecasting is the following exercise. If the current value of SP500 is, for example, 1000, we are interested in the value of SP500 one year later. More precisely, we are interested in what is the yield given by such an index development. How to approach this problem? Assuming the yield distribution has not changed over time, it's logical to use a value which is "reasonable" in the light of past data. Statistically speaking, one-year yield R_1 is forecasted by the expected value¹³² of the annual yield distribution:

$$R_1 = E\{Y\}, \quad (2)$$

where $E\{\}$ is the expectation operator.

The expected value of a random variable defined by (1) is

$$E\{Y\} = \sum_{i=1}^k (x_i \cdot \Pr\{x_i\}) = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T x_i. \quad (3)$$

Thus, it is equivalent to the arithmetic mean. For one-period forecasting, we used the arithmetic average of T past values x_i (later denoted $a_{A(T)}$) and not their geometric average (later denoted $a_{G(T)}$).

Association of the past data average with the distribution's mean is enabled by two facts. Firstly, expected value of a distribution is defined as a weighted arithmetic average (if all past data are unique, all weights are equal to $1/T$). Secondly, the distribution is constituted by the very same values from which the arithmetic average is calculated. In Chapter 6.2 it is shown that geometric average does not meet the first fact, making such association impossible.

5.4.2 Inconsistent forecast for more-than-one period ($N \geq 2$)

The previous chapter's solution was very straightforward. More complicated situation occurs when trying to predict yield for more periods. When forecasting for N periods, we ask, if today's value of SP500 is 1000, what it will be after N periods. More precisely, we examine the associated compound annual growth rate realized during this N -year period.

Intuitive solution can be best described in the following way. Consider this 8-step procedure.

1. Set the initial (today's) value of the financial variable to one, i.e. $I_0 = 1$.

¹³² The possibility to describe the distribution's „center of gravity" differently, for example by the distribution's median, is left aside.

2. Using the probability distribution of the original data (D), randomly draw one value from this distribution and apply it to the index. If the randomly drawn value (a particular realization of Y_1) is called y_1 , we obtain $I_0 \cdot (1 + y_1) = (1 + y_1) = I_1$. We thus obtain the index value after one year (I_1).
3. Draw another random number from D distribution and chain-apply it on the index. If the drawn value (again a particular realization of Y_2) is y_2 , we obtain $I_0 \cdot (1 + y_1) \cdot (1 + y_2) = (1 + y_1) \cdot (1 + y_2) = I_2$. This is the index value after 2 years (I_2).
4. Continue drawing independent random numbers and applying them to the index in the same manner until having reached the total number of N independent draws. Then we obtain $I_0 \cdot (1 + y_1) \cdot (1 + y_2) \cdot \dots \cdot (1 + y_N) = (1 + y_1) \cdot (1 + y_2) \cdot \dots \cdot (1 + y_N) = I_N$. We thus obtain the index value after N years (I_N).
5. Record the resulting index value after N years – the number I_N . We label it $I_{N,1}$ to explicitly mention it is the first of the many simulated final index values.
6. Repeat steps 2-5 many times or, ideally, pick all permissible combinations of draws. The number of such repetitions we call j .
7. Take the arithmetic average of the many resulting index values after N years – numbers $I_{N,1}, I_{N,2}, \dots, I_{N,j}$. We obtain the number of $\bar{I}_N = \frac{1}{j} \cdot \sum_{i=1}^j I_{N,i}$.
8. Take the N -th root of the average index value after N years to obtain compound annual growth rate of the index. In other words, annual yield, which delivers the average index value in N years. This constitutes the N -year horizon forecast (R_N): $R_N = \sqrt[N]{\bar{I}_N} - 1$.

Now we describe the process algebraically. Index value after N years can be generally written as a product of N random variables Y_i , all identically distributed with distribution D (1) and mutually independent.

$$I_N = 1 \cdot (1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_N) \quad (4)$$

The expected value (the arithmetic average) of index values after N years will generally be

$$E\{I_N\} = E\{(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot (1 + Y_N)\} \quad (5)$$

Because the expected value of the index after N years can be calculated as the average of all possible combinations of one-year past yields x_i , the expression (5) can be sequentially simplified to the form of expression (9).

$$E\{I_N\} = \frac{1}{T^N} \cdot \sum_{i_1=1}^T \sum_{i_2=1}^T \dots \sum_{i_N=1}^T \left[(1+x_{i_1}) \cdot (1+x_{i_2}) \cdot \dots \cdot (1+x_{i_N}) \right] \quad (6)$$

$$E\{I_N\} = \frac{1}{T^{N-1}} \cdot \sum_{i_2=1}^T \dots \sum_{i_N=1}^T \left[(1+x_{i_2}) \cdot \dots \cdot (1+x_{i_N}) \cdot \frac{1}{T} \sum_{i_1=1}^T (1+x_{i_1}) \right] \quad (7)$$

$$E\{I_N\} = (1+E\{Y_1\}) \cdot (1+E\{Y_2\}) \cdot \dots \cdot (1+E\{Y_N\}) = (1+R_1) \cdot \dots \cdot (1+R_1) \quad (8)$$

$$E\{I_N\} = (1+R_1)^N \quad (9)$$

See that to forecast expected value of the index after N years, only the expected value of the 1-year yield is needed. The annualized N -year forecast (see step 8 of the procedure) is

$$R_N = [E\{(1+Y_1) \cdot (1+Y_2) \cdot \dots \cdot (1+Y_N)\}]^{1/N} - 1 = [(1+R_1)^N]^{1/N} - 1 \quad (10)$$

$$R_N = R_1. \quad (11)$$

As N can be any natural number, the forecasts are identical for all horizons and are equal to the 1-year forecast. It looks like arithmetic, and not geometric, average is the right way to calculate average yields, irrespectively of the forecasting horizon N . This would counter the conclusions of Indro – Lee (1997) and recommendations in Damodaran (2013b).

Nevertheless, the procedure, specifically steps 7 and 8, contain a flaw. This is best seen when $N = 85$. From Table 5.1 we know the arithmetic average of the SP500 data ($a_{A(85)}$) to be 11.26%. Setting the initial index value $I_0 = 1$, the terminal index value (I_{85}) is:

$$I_{85} = I_0 \cdot (1+a_{A(85)})^{85} = 1.1126^{85} = 8686. \quad (12)$$

When the initial value is sequentially adjusted for annual yields which materialized each year, being the way how the data were acquired, we reach the terminal value (see geometric average $a_{G(85)} = 9,31\%$ in Table 5.1)

$$I_{85} = I_0 \cdot (1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_{85}) = (1+a_{G(85)})^{85} = 1.0931^{85} = 1932. \quad (13)$$

This documents that arithmetic averaging, though apparently correct through equation (11), substantially overstates reality; in this case by the factor of almost 4.5! For exhibiting this odd behaviour, we call the procedure inconsistent for horizon 85 years. Moreover, this was the case of zero autocorrelation. Were negative autocorrelation in place, then

$$E\{I_N\} < E\{(1+Y_1) \cdot (1+Y_2) \cdot \dots \cdot (1+Y_N)\} \quad (14)$$

and the procedure would overshoot reality even more. The overshooting effect of autocorrelation further magnifies with the rising intensity of negative autocorrelation.

5.5 A consistent forecasting procedure

The procedure introduced in Chapter 5.4 is imperfect, when forecasting for more periods. We then need to find a method which is internally consistent. **Internal consistency** means that the forecast, if compounded over the relevant horizon N , corresponds with the index changes that have occurred (or are expected to occur, given the data) during N -year period. The consistency

requires the forecasts to differ across forecasting horizons (N). A consistent procedure for a general horizon is the following.

1. Construct the annual yield distribution D from T source observations. (The distribution is likely to be described by a trivial histogram, in which every unique observation occurs with the frequency of $1/T$).
2. Set the initial value of the index to be one, i.e. $I_0 = 1$.
3. Using the annual yield distribution D , randomly draw N independent values and apply them to the index. If drawn values are labeled y_1, y_2, \dots, y_N we obtain $I_0 \cdot (1 + y_1) \cdot (1 + y_2) \cdot \dots \cdot (1 + y_N) = I_N$. Thus, we obtain the terminal value of the index after N periods (I_N).
4. Take the N -th root of the terminal value of the index after N periods (I_N) and subtract one to obtain compound annual growth rate. In other words, to obtain annual yield b , which delivers the above-mentioned terminal index value after N periods, i. e. $b = (I_N)^{1/N} - 1$.
5. Record the annual yield for N periods, the number b . We label it b_1 to explicitly mention it is the first of many simulated final values.
6. Repeat steps 3-5 infinite times or, ideally, pick all permissible combinations of draws. The number of such repetitions we call j .
7. Take the arithmetic average of individual annual yields for N periods – numbers b_1, \dots, b_j . The resulting number is the yield forecast for the N -period horizon (R_N): $R_N = \frac{1}{j} \cdot \sum_{i=1}^j b_j$.

Algebraically written, the forecast is

$$R_N = E\{B\} = E\{I_N^{1/N}\} - 1 = E\{(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_N)\}^{1/N} - 1, \quad (15)$$

where B is a random variable describing possible realizations of number b from step 4.

Call this expression the **analytical form** of the **horizon-consistent average** for N period forecasting.

Assuming independence of random variables Y_i (which also implies zero autocorrelation), it is possible to simplify (15) to:

$$\begin{aligned} & E\{(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_N)\}^{1/N} = \\ & = E\{(1 + Y_1)^{1/N} \cdot (1 + Y_2)^{1/N} \cdot \dots \cdot (1 + Y_N)^{1/N}\} = \\ & = E\{(1 + Y_1)^{1/N}\} \cdot E\{(1 + Y_2)^{1/N}\} \cdot \dots \cdot E\{(1 + Y_N)^{1/N}\} = [E\{(1 + Y)^{1/N}\}]^N \end{aligned} \quad (16)$$

Call the expression (17) the **computational form** of the **horizon-consistent average** for N period forecasting. For brevity, the term *horizon-consistent* will be shortened to *consistent* in the text below.

$$R_N = \left[E \left\{ (1+Y)^{1/N} \right\} \right]^N - 1 \quad (17)$$

Although the computational form is less instructive in comparison with the analytical form, it possesses a fundamental advantage in the ease of calculation. The implementation of the analytical form is for longer horizons possible only simulationally. It means in step 8, picking all combinations becomes infeasible and we have to resort to the first-mentioned option of randomized drawing (and, of course, the phrase *infinite times* has to be commuted to *many times*, say, 2 000 000). On the contrary, computational form allows calculating exact values of the consistent average for all forecasting horizons in real time and can be implemented even in a spreadsheet.

Notice the innovation of the consistent procedure over the previous inconsistent one. Both approaches firstly simulate terminal values of the index after N periods (I_N), and

- **Consistent approach** firstly takes the roots and subsequently calculates the mean value from these many roots.
- **Inconsistent approach** firstly calculates the mean value of the index and subsequently takes the root of it.

In other words, the consistent approach considers the annual yields in every N -year scenario, from which then takes the mean value. The inconsistent approach calculates the key result – the compound annual growth rate – via the mean value of the index after N periods and this bypass inserts a flaw into the result.

Are the inconsistent values systematically greater or smaller than the consistent ones for some horizons?

The answer lies in Jensen's inequality.¹³³ It states that for every convex (or concave) function $g(z)$ holds $g(E\{z\}) \leq E\{g(z)\}$ (or $g(E\{z\}) \geq E\{g(z)\}$). Because $g(z) = z^{1/N}$, where $x = (1+Y_1) \cdot (1+Y_2) \cdot \dots \cdot (1+Y_N)$, is concave for $N > 1$, Jensen's inequality implies:

$$\left[E \left\{ (1+Y_1) \cdot (1+Y_2) \cdot \dots \cdot (1+Y_N) \right\} \right]^{1/N} \geq E \left\{ \left[(1+Y_1) \cdot (1+Y_2) \cdot \dots \cdot (1+Y_N) \right]^{1/N} \right\} \quad (18)$$

The inconsistent result (the left-hand side) overshoots the consistent result (the right-hand side) for all forecasting horizons longer than one period (i. e. $N > 1$). For one-year horizon, both calculations are equal, as

$$\left[E \{ 1+Y_1 \} \right]^1 = E \left\{ \left[1+Y_1 \right]^1 \right\}. \quad (19)$$

In other words, in one-year forecasting there is no difference between taking the expected value first and taking its root later, or vice versa, which was the only difference between the procedures. As a result, the arithmetic-average procedure presented in Chapter 5.4 is equivalent to the consistent procedure for one-year horizon ($N = 1$).

¹³³ The proof is available on http://en.wikipedia.org/wiki/Jensen's_inequality.

5.6 Biases in arithmetic and geometric averages

This chapter examines if arithmetic and geometric averages generally overstate or understate the consistent result presented in Chapter 5.5.

5.6.1 Systematic error when forecasting with arithmetic average

Because the procedure presented in Chapter 5.4 is based on arithmetic average, the direction of its bias relative to the consistent average has already been discussed. It stems from the following relationships:

$$\begin{aligned} 1 + a_{A(T)} &= 1 + E\{Y\} = \left[\left(E\{1 + Y\} \right)^N \right]^{1/N} = \\ &= \left[\left(E\{(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_N)\} \right) \right]^{1/N} \geq \\ &E \left\{ \left[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_N) \right]^{1/N} \right\} \end{aligned} \quad (20)$$

Forecasts using the arithmetic average ($a_{A(T)}$) are always consistent for $N=1$ and always overstate the consistent forecast for $N > 1$. The degree of overshooting is given by the concavity of the function $g(z) = z^{1/N}$. Higher N means higher concavity and more serious overshooting. Thus, arithmetic average is most flawed when forecasting for long horizons.

Another determinant of the overshooting magnitude is the dispersion of the past yields in the dataset (x_i 's)¹³⁴. In the hypothetical case when all past yield are identical, the expression (20) holds as equality. But there is little reason for studying averaging mechanisms when all values are identical.

5.6.2 Systematic error when forecasting with geometric average

Now we investigate the systematic bias of the geometric average, relative to the consistent average. When calculated from T values, geometric average is defined by (28). There are 2 reasons why it deviates from the consistent average:

- Different choice of the forecasting horizon,
- Discrepancy between the geometric average of the entire dataset and the expected value of sample geometric averages.

A formal decomposition to both sources of difference can be made as follows.

$$a_{K(T)}(N) - a_{G(T)} = \left[a_{K(T)}(N) - a_K(T) \right] + \left[a_{K(T)}(T) - a_{G(T)} \right], \quad (21)$$

where $a_{K(T)}(\cdot)$ is the consistent average for the forecasting horizon in brackets and $a_{G(T)}$ is the geometric average. Subscript (T) indicates they are calculated using a dataset of T observations.

¹³⁴ This can be seen from the expression z in the assumptions of Jensen's inequality. z is constant if and only if all the values are identical (and always the same value y is drawn from the distribution). Function $g(z)$ is then defined only in one point, which does not satisfy the convexity/concavity definition and Jensen's inequality cannot be applied. The greater the differences between the x_i data, the greater the dispersion of z values. The overshooting of arithmetic is then amplified through the prospective concavity of $g(z)$.

The term in the first square brackets relates to the error caused by the forecasting horizon. The term in the second square brackets relates to the error of association of the geometric average with the expected sample average. Let's investigate both errors in detail.

Forecasting horizon error. It would be nice to consider geometric average to be a special case of a consistent average with a forecasting horizon $N = T$. In other words, to consider that for geometric average $a_{G(T)}$ holds

$$\begin{aligned} 1 + a_{G(T)} &= [(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_T)]^{1/T} = \\ &= E\left\{[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_T)]^{1/T}\right\} \end{aligned} \quad (22)$$

For $T = N$, the expression (22) becomes (after subtracting 1) identical to the expression (15), which describes the consistent result. Thus, for $T = N$ the geometric average equals the consistent one. In other cases, the two are not equal. This is caused by the fact the consistent average diminishes in forecasting horizon.

Why does the consistent average diminish in N ? This can be reformulated to stating that the expected value of the geometric average of values randomly drawn from an identical distribution decreases in the number of values (draws) subsumed in the average. This statement takes the algebraic form of

$$E\left\{[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_N)]^{1/N}\right\} > E\left\{[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_{N+1})]^{1/(N+1)}\right\} \quad (23)$$

for all natural N . For $N = 1$, under the independence assumption the statement is simplified to

$$E\{1 + Y_1\} > E\left\{[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2)]^{1/2}\right\} = E\{(1 + Y_1)^{1/2}\} \cdot E\{(1 + Y_2)^{1/2}\} = \left[E\{(1 + Y_1)^{1/2}\}\right]^2 \quad (24)$$

Jensen's inequality applied to $z = 1 + Y_1$ and a concave function $g(z) = z^{1/2}$ yields

$$\left[E\{(1 + Y_1)^{1/2}\}\right]^2 < \left[E\{1 + Y_1\}\right]^{1/2} = E\{1 + Y_1\}, \quad (25)$$

which proves the statement for $N = 1$. Now we show the statement holds for a general N . Let's rearrange the statement (23) to the form similar to (24):

$$\left[E\{(1 + Y)^{1/N}\}\right]^N > \left[E\{(1 + Y)^{1/(N+1)}\}\right]^{N+1}. \quad (26)$$

Denote $z = (1 + Y)^{1/N}$. As seen in (27),

$$\begin{aligned} \left[E\{(1 + Y)^{1/(N+1)}\}\right]^{N+1} &= \left[E\{z^{N/(N+1)}\}\right]^{N+1} < \left[E\{z\}\right]^{N/(N+1) \cdot (N+1)} = \\ &= \left[E\{z\}\right]^N = \left[E\{(1 + Y)^{1/N}\}\right]^N \end{aligned} \quad (27)$$

Jensen's inequality for a concave function $g(z) = z^{N/(N+1)}$ places an upper bound on the right-hand side of the inequality (26), and this upper bound is found to be equal to the left-hand side of the inequality (26). This completes the proof.

The recently proven statement means that the consistent average permanently diminishes when the forecasting horizon N increases (until some limit value, as shown later). When using the geometric average $a_{G(T)}$, which is constant and thus independent of forecasting horizon N , we implicitly employ a consistent average with a forecasting horizon T for all horizons. As (22)

shows, the geometric average is equivalent to the consistent average only for $T = N$. The corollary is that for $N < T$ the geometric average is below the consistent average and for $N > T$ it is above the consistent average.

Error from discrepancy between the geometric average and the expected value. Now we return to (22), which assumed the geometric average of actual data equals to the expected value of geometric average of random draws from their distribution. The statement is, unfortunately, not fully correct. Let us investigate why.

The geometric average ($a_{G(T)}$) of all past realized yields x_i is defined as:

$$1 + a_{G(T)} = \sqrt[T]{(1 + x_1) \cdot (1 + x_2) \cdot \dots \cdot (1 + x_T)}. \quad (28)$$

The expected value of the geometric average of T -element independent random selection from the distribution described by x_i 's is calculated as the arithmetic average form all permissible situations:

$$E\left\{\left[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2) \cdot \dots \cdot (1 + Y_T)\right]^{1/T}\right\} = \frac{\sum_{i_1=1}^T \sum_{i_2=1}^T \dots \sum_{i_T=1}^T \sqrt[T]{(1 + x_{i_1}) \cdot (1 + x_{i_2}) \cdot \dots \cdot (1 + x_{i_T})}}{T^T} \quad (29)$$

Besides the scenarios in which the random draw is identical to the actual data, the expected value is also affected by scenarios different from the actual data. Due to arithmetic averaging of these unrealized scenarios, the expected value is greater than the geometric average of the actual data (or equal, provided that all yield data are identical).

Let aside the trivial cases in which all yield data in the dataset are the same (including the $T = 1$ case) and expressions (28) and (29) are thus obviously equal. We will only consider the cases with (at least two) different numbers. For $T = 2$ the statement means:

$$\begin{aligned} 1 + a_{G(2)} &= \sqrt{(1 + x_1) \cdot (1 + x_2)} < \\ &< \frac{\sqrt{(1 + x_1) \cdot (1 + x_1)} + 2\sqrt{(1 + x_1) \cdot (1 + x_2)} + \sqrt{(1 + x_2) \cdot (1 + x_2)}}{4} = \\ &= E\left\{\left[(1 + Y_1) \cdot (1 + Y_2)\right]^{1/2}\right\} \end{aligned} \quad (30)$$

After rearranging, it can be seen the inequality (30) is equivalent to the statement that 2-element arithmetic average is always greater than 2-element geometric average (again, same numbers case left aside).

For $T > 2$ it can be seen the right-hand side of (29) is the T -th power of the arithmetic average of numbers r_i . After raising the right-hand side of (28) to the power of T , one arrives to the T -element proof of the inequality between arithmetic and geometric average mentioned in Chapter 5.2. This means the expected value is greater than the geometric average of actual data. Because consistent approach is based on expected values, the geometric average will always understate the consistent average.

The geometric average is closer to the consistent one if the dataset is large (T is large), because the error from associating the geometric average with the expected value is reduced as the samples become more similar to the actual data¹³⁵.

Both errors jointly. We have shown that there exist two sources of bias of the geometric average from the consistent average: first appears when a different forecasting horizon from the number of observations is used (present if $N \neq T$, biasing upwards or downwards) and second stems from the association of the geometric average with the expected value when sampling (always present, biasing downwards). For each T , the sum of both biases is removed as $N \rightarrow \infty$, because

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} \left[E \left\{ (1+Y)^{1/N} \right\} \right]^N &= \\ &= \lim_{N \rightarrow \infty} \left[\frac{(1+Y_1)^{1/N} + (1+Y_2)^{1/N} + \dots + (1+Y_T)^{1/N}}{T} \right]^N = a_{G(T)} \end{aligned} \quad (31)$$

It means the consistent average converges to the geometric average with infinite forecasting horizon. Put differently, the geometric average is consistent only for $N \rightarrow \infty$. In other cases, which include all practical situations, the geometric average always understates the consistent value. The magnitude of error diminishes with increasing forecasting horizon. Application in Chapter 5.8 shows the error magnitude diminishes rather quickly.

The choice of forecasting horizon matters. The shorter is the horizon, the greater is the magnitude of understatement when geometric average is used. Obviously, geometric average operates with the largest error when forecasting for one-period ($N = 1$). In the common case of $N < T$, the error caused by an improper forecasting horizon further magnifies the error caused by the association with the expected value (in (21), both square brackets are positive). In the less common case¹³⁶ of $N > T$, the horizon error partially compensates the expected value association error, until full convergence occurs for $N = \infty$ (i.e. $a_{K(T)}(\infty) = a_{G(T)}$). Summing up, geometric average always understates the consistent value; most severely, if the forecasting horizon is short. These theoretical conclusions comply with Indro – Lee (1997).

5.7 A numerical illustration

Let's consider a short numerical example to contribute to better understanding of the consistent averaging procedure and to demonstrate validity of the previous theoretical results.

¹³⁵ The statement is difficult to formulate precisely and prove, because as T increases, is not clear, where do the additional observations come from.

¹³⁶ In company valuation $N = 10$ is typical. The question then arises if 9 and less data points are sufficient. Damodaran (2013b) objects even to using data from developed markets outside USA, where there are 20-25 annual observations available. His argument goes that standard error of such estimation is too large for practical use. Standard error (if data are independent and identically distributed; both being assumed in this text) equals standard deviation of the data divided by the square root of the number of observations. If the standard deviation is realistically 20%, 9 data points deliver 6% standard error. SP500 realistic yield estimate being 9%, with 95% reliability the true yield is between -2.76% and 20.76%, (normal quantile used). This is hardly usable.

Assume we have annual index yields only for the 2010-2012 period, thus $T = 3$. These yields (Damodaran, 2013) are 14.82% (2010), 2.07% (2011) and 15.83% (2012).

Arithmetic average. The arithmetic average of these yields is:

$$a_{A(3)} = \frac{0.1482 + 0.207 + 0.1583}{3} = 0.1091 = 10.91\% .$$

Geometric average. The geometric average of these yields is:

$$a_{G(3)} = \sqrt[3]{(1 + 0.1482) \cdot (1 + 0.207) \cdot (1 + 0.1583)} - 1 = 0.1072 = 10.72\%$$

Consistent average. We will calculate consistent averages using both the analytical form, which demonstrates the logic of the construction, and the computational form, which demonstrates the relative ease of calculation. We start with the analytical form.

Consistent average differs by the forecasting horizon considered. Here we calculate it for horizons of one, two and three years. For one-year forecasting horizon, i.e. $N = 1$, there are only 3 scenarios of index development. We have only 3 source data available and we expect one of them to materialize with equal likelihood. Thus, the consistent average would be

$$\begin{aligned} a_{K(3)}(1) &= \frac{1}{3} \cdot (1 + 0.1482)^{1/1} + \frac{1}{3} \cdot (1 + 0.0207)^{1/1} + \frac{1}{3} \cdot (1 + 0.1583)^{1/1} - 1 = \\ &= 0.1091 = 10.91\% = a_{A(3)} \end{aligned}$$

For two-year forecasting horizon, i.e. $N = 2$, 9 equally likely index development scenarios might occur (see Table 5.3).

Tab. 5.3 Two-year scenarios for consistent average calculation

Scenario number	First year yield	Second year yield	Terminal index value (initial value = 1)	Compound annual growth rate
1	2.07%	2.07%	1.0418	2.07%
2	2.07%	14.82%	1.1720	8.26%
3	2.07%	15.83%	1.1823	8.73%
4	14.82%	2.07%	1.1720	8.26%
5	14.82%	14.82%	1.3184	14.82%
6	14.82%	15.83%	1.3300	15.32%
7	15.83%	2.07%	1.1823	8.73%
8	15.83%	14.82%	1.3300	15.32%
9	15.83%	15.83%	1.3417	15.83%

Data source: Damodaran (2013)

Scenarios are combinations of yields occurring in the first and the second year. Each combination delivers certain terminal value of the index (which is initially set to one) and associated compound annual growth rate. This compound rate equals the geometric average of

realized annual growth rates. Consistent average is calculated as the arithmetic average of these 9 compound growth rates:

$$\begin{aligned}
 a_{K(3)}(2) &= \frac{1}{9} \cdot (1.0418)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.172)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.1823)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.172)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.3184)^{1/2} + \\
 &+ \frac{1}{9} \cdot (1.33)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.1823)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.33)^{1/2} + \frac{1}{9} \cdot (1.3417)^{1/2} - 1 = \\
 &= \frac{0.0207 + 0.0826 + 0.0873 + 0.0826 + 0.1482 + 0.1532 + 0.0873 + 0.1532 + 0.1583}{9} = 10.82\%
 \end{aligned}$$

For three-year forecasting horizon, i. e. $N = 3$, 27 equally likely index development scenarios might occur (see Table 5.4).

Tab. 5.4 Three-year scenarios for consistent average calculation

Scenario	1st year yield	2nd year yield	3rd year yield	Terminal index value	CAGR	Scenario	1st year yield	2nd year yield	3rd year yield	Terminal index value	CAGR
1	2.07%	2.07%	2.07%	1.0634	2.07%	15	14.82%	14.82%	15.83%	1.5271	15.16%
2	2.07%	2.07%	14.82%	1.1962	6.15%	16	14.82%	15.83%	2.07%	1.3575	10.72%
3	2.07%	2.07%	15.83%	1.2067	6.46%	17	14.82%	15.83%	14.82%	1.5271	15.16%
4	2.07%	14.82%	2.07%	1.1962	6.15%	18	14.82%	15.83%	15.83%	1.5405	15.49%
5	2.07%	14.82%	14.82%	1.3457	10.40%	19	15.83%	2.07%	2.07%	1.2067	6.46%
6	2.07%	14.82%	15.83%	1.3575	10.72%	20	15.83%	2.07%	14.82%	1.3575	10.72%
7	2.07%	15.83%	2.07%	1.2067	6.46%	21	15.83%	2.07%	15.83%	1.3694	11.05%
8	2.07%	15.83%	14.82%	1.3575	10.72%	22	15.83%	14.82%	2.07%	1.3575	10.72%
9	2.07%	15.83%	15.83%	1.3694	11.05%	23	15.83%	14.82%	14.82%	1.5271	15.16%
10	14.82%	2.07%	2.07%	1.1962	6.15%	24	15.83%	14.82%	15.83%	1.5405	15.49%
11	14.82%	2.07%	14.82%	1.3457	10.40%	25	15.83%	15.83%	2.07%	1.3694	11.05%
12	14.82%	2.07%	15.83%	1.3575	10.72%	26	15.83%	15.83%	14.82%	1.5405	15.49%
13	14.82%	14.82%	2.07%	1.3457	10.40%	27	15.83%	15.83%	15.83%	1.5540	15.83%
14	14.82%	14.82%	14.82%	1.5137	14.82%						

Data source: Damodaran (2013).

Note: Initial index value is 1. CAGR stands for compound annual growth rate.

The consistent average is then

$$\begin{aligned}
 a_{K(3)}(3) &= \frac{1}{27} \cdot (1.0634)^{1/3} + \frac{1}{27} \cdot (1.1962)^{1/3} + \dots + \frac{1}{27} \cdot (1.5405)^{1/3} + \frac{1}{9} \cdot (1.1554)^{1/3} - 1 = \\
 &= \frac{0.0207 + 0.0615 + \dots + 0.1549 + 0.1583}{27} = 10.79\%
 \end{aligned}$$

Now we employ the computational form. It has the form

$$a_{K(T)}(N) = \left[E \left\{ (1+Y)^{1/N} \right\} \right]^N,$$

where expectations are always taken from only 3 values, because there are only three observations available. After evaluating at N , the respective N -period consistent average forecasts are delivered.

$$a_{K(3)}(1) = \left[\frac{1}{3} \cdot (1+0.1482)^{1/1} + \frac{1}{3} \cdot (1+0.0207)^{1/1} + \frac{1}{3} \cdot (1+0.1583)^{1/1} \right]^1 - 1 = 0.1091 = 10.91\%$$

$$a_{K(3)}(2) = \left[\frac{1}{3} \cdot (1+0.1482)^{1/2} + \frac{1}{3} \cdot (1+0.0207)^{1/2} + \frac{1}{3} \cdot (1+0.1583)^{1/2} \right]^2 - 1 = 0.1082 = 10.82\%$$

$$a_{K(3)}(3) = \left[\frac{1}{3} \cdot (1+0.1482)^{1/3} + \frac{1}{3} \cdot (1+0.0207)^{1/3} + \frac{1}{3} \cdot (1+0.1583)^{1/3} \right]^3 - 1 = 0.1079 = 10.79\%$$

This simple numerical exercise illustrates that: (1) arithmetic average is greater than geometric average, (2) for one-period forecasting horizon the consistent average equals the arithmetic one, (3) for more-than-one-period horizon lies the consistent average between the arithmetic and geometric averages, (4) as the horizon increases, the consistent average converges to the geometric average (though full convergence occurs only asymptotically), (5) consistent average can be calculated for arbitrary-long horizon, (6) when the analytical form of the consistent average is used, the number of scenarios needed to consider grows extremely fast with the forecasting horizon, (7) the analytical form and the computational form of the consistent average deliver identical numbers; the computational form only being incomparably faster and easier.

5.8 Application to SP500

In the previous sections it has been shown that except for cases of $N=1$ for the arithmetic average and $N=\infty$ for the geometric average, both averages are systematically biased against the consistent average. Although the theoretical exposition identified the direction of the bias, its magnitudes are generally unclear. Borrowing the valuation example and using the forecasting horizon of $N=10$ recommended by Damodaran (2013b), we can't decide whether to use the geometric or the arithmetic average. Moreover, we don't know the quantitative effect of shifting to the consistent average instead. In this chapter, we address these issues numerically for annual SP500 dataset for 1928-2012 period published by Damodaran (2013). This dataset is frequently used by valuation practitioners for future yields estimation; for this reason it was selected for our application.

Three types of average are tested against the consistent average, serving as a benchmark.

- Arithmetic average defined by (32),
- **Geometric average** defined by (33),
- **Weighted average** of arithmetic average and geometric average defined by (34), proposed by Indro – Lee (1997). It behaves more like arithmetic average when the forecasting horizon is small relative to the number of

observation. Contrarily, it behaves more like geometric average when the forecasting horizon approaches the number of observations.¹³⁷

$$a_{A(T)} = \frac{1}{T} \cdot \sum_{i=1}^T x_i \quad (32)$$

$$a_{G(T)} = \sqrt[T]{(1+x_1) \cdot (1+x_2) \cdot \dots \cdot (1+x_T)} - 1 \quad (33)$$

$$a_{W(T)}(N) = \frac{T-N}{T-1} \cdot a_{A(T)} + \frac{N-1}{T-1} \cdot a_{G(T)} \quad (34)$$

The dataset lists 85 annual yields ($T = 85$). Geometric and arithmetic averages are constant for all forecasting horizons and correspond with Table 5.1. Weighted and consistent averages are horizon-specific. We will consider horizons up to 85 years.¹³⁸

The result of the analysis is shown in Figure 5.2. As noted in Chapter 5.6, the arithmetic average is consistent for one-year forecasting. For longer forecasting horizons it strongly deviates from the consistent value. Oppositely, the geometric average converges to the consistent average as the forecasting horizon rises. The weighted average linearly connects the two.

Figure 5.2A demonstrates the geometric average is usually closer to the consistent value than the arithmetic average and is also usually closer than the weighted average. Calculation of their respective deviations (in absolute terms) for each horizon identifies the breaking horizons. Deviations are shown in Figure 5.2B.

By horizon, the preferable methods are these. For $N = 1$, the arithmetic average and the weighted average (being equal by definition) are preferred. For $N = 2$, the weighted average is preferred. For longer horizons than 2 years, the geometric average is preferred. Finally for $N = 83, 84, 85$, the weighted average is preferred, as its small upward-shifting arithmetic component partially compensates for the improper association of geometric average with the sample expected value (the second bias from Chapter 5.6.2). In general, though, the performance of weighted average is rather disappointing; its weighting scheme poorly follows the hyperbolic course of the consistent average (see Figure 5.2A) and in most cases, the geometric average is a far better choice (see Figure 5.2B).

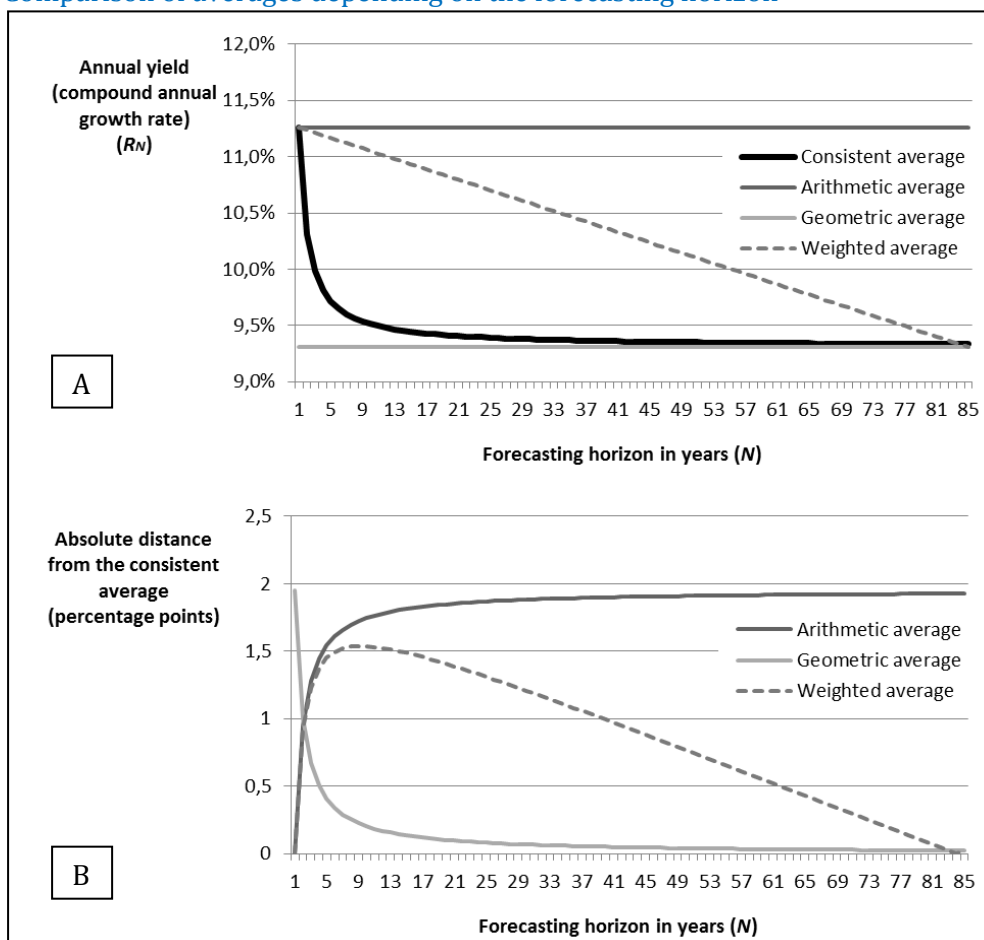
The analysis of SP500 delivers two practical conclusions. First, for the recommended horizons around 10 years, the geometric average is clearly preferable. Even if we substantially deviate from the 10-year forecasting horizon, geometric average will still remain the best choice out of the three generally inconsistent averages.

Second, if we accept the logic of the consistent average, the consistent average is preferred for all horizons. The error arising from using the geometric average instead of the consistent one is 0.2 percentage points, when forecasting for 10 years. It is not much, but still far from being negligible.

¹³⁷ Notice that for $N = 1$ it equals to the arithmetic average (which is consistent in this case) and for $N = T$ it equals to the geometric average (which is near-consistent in this case). Nevertheless, the weighting scheme is rather intuitive than mathematically-founded.

¹³⁸ The weighted average is not reasonably defined for horizons exceeding the total data span. For other averages, the conclusions for horizons over 85 years can be easily inferred from the analysis presented here.

Fig. 5.2 Comparison of averages depending on the forecasting horizon



Data source: Damodaran (2013)

5.9 Conclusion

The choice of averaging mechanism has a considerable effect on the resulting value of the average past yield or the yield forecast. A consistent solution was proposed here and was called the horizon-consistent average.

Its first step is determining the forecasting horizon for yield forecasts (or the relevant period for past yield measurement). On this horizon, all possible combinations of one-period developments that occurred in the dataset are simulated and a geometric average yield is calculated for each scenario. Finally, the horizon-consistent yield is taken as a mean value (arithmetic average) of these yields. It should be mentioned that even with the same dataset of, the horizon-consistent yield differs with different forecasting horizons.

Using this horizon-consistent average as a benchmark, it is possible to discuss biases in arithmetic and geometric averages. For one-year horizon, the arithmetic average equals the consistent average. For infinite horizon, the geometric average equals the consistent average. For interlaying horizons, the arithmetic average overstates and the geometric average understates the consistent value.

The application to Ibbotson Associates data for SP500 showed that when estimating the CAPM model and considering the recommended 10-year forecasting horizon to match the average duration of equity and the 10-year risk-free rate (Damodaran, 2008), the geometric average is much closer to the consistent average. For the 1928-2012 annual data, the difference constitutes

only 0.2 percentage points, while arithmetic average deviates from the consistent solution by 1.75 percentage points.

In the article, the source data were assumed to be perfect (i.e. non-stochastic). Though the preference of the horizon-consistent average might be questioned when stochastic data are assumed and further investigation of such case is welcome, the horizon-consistent averaging procedure is beneficial in discussing yield measurement and explaining the differences between arithmetic and geometric averages.

Literatura

- [1] Bemerew, D. A. (1999): Cointegration between stock market indices: the case of the Slovak and Czech stock price indices. Prague Economic Papers 1/1999
- [2] Damodaran, A. (2013): *Annual Returns on Stock, T. Bonds and T. Bills: 1928 – Current*. [downloaded: 15.7.2013]. Stern School of Business. New York University. Available from http://people.stern.nyu.edu/adamodar/New_Home_Page/datafile/histretSP.html
- [3] Damodaran. A. (2013a): *Estimating Risk Parameters*. [downloaded: 14.12.2013]. Stern School of Business. New York University. Available from <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/beta.pdf>.
- [4] Damodaran. A. (2013b): *Equity Risk Premiums (ERP): Determinants, Estimation and Implications – The 2013 Edition*. [downloaded: 11.1.2014]. Stern School of Business. New York University. Available from http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2238064
- [5] Damodaran. A. (2008): *What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block*. Stern School of Business. New York University. [downloaded: 7.7.2013]. Available from <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf>.
- [6] Dariusz, F. (2013). Returns and Persistence of Investment Fund Performance in the Czech Republic. Prague Economic Papers 3/2013, pp. 324-342.
- [7] Fama, E. F. – French, K. R. (1988): *Permanent and Transitory Components of Stock Prices*. Journal of Political Economy, 1988, vol. 96, pp. 246-273.
- [8] Indro, D. C. – Lee, W. Y. (1997): Biases in Arithmetic and Geometric Averages as Estimates of Long-Run Expected Returns and Risk Premia. Financial Management, 1997, vol. 26, no. 4, pp. 81-90.
- [9] Kavker, A. – Festic, M. (2011). *Modelling stock exchange index returns in different GDP Growth Regimes*. Prague Economic Papers 1/2011, pp. 3-22.
- [10] Mařík, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.
- [11] Trešl, J. (1999). Prague stock exchange: sectorial indices development in 1997. Prague Economic Papers 1/1999.
- [12] Trešl, J. – Blatná, D. (2007). *Dynamic Analysis of Selected European Stock Markets*. Prague Economic Papers 4/2007, pp. 291-302.
- [13] Veselý, J. (2004). *Základy matematické analýzy*. První díl. Praha: Matfyzpress.

Kapitola 6

Závěr: přínos pro oceňovací praxi a teorii

Tato disertační práce si kladla za cíl přispět ke zkvalitnění české oceňovací praxe v oblasti diskontních měr pro oceňování dlouhodobých aktiv tím, že navrhne zdokonalení oceňovacích postupů v oblastech (1) volby nástroje finančního trhu pro odvození bezrizikové výnosnosti, (2) způsobu konstrukce výnosových křivek pro oceňovací účely a (3) způsobu výpočtu průměru realizované výnosnosti pro odvození rizikové premie za nesení akciového rizika.

V této části jsou shrnuty hlavní závěry práce. Závěry jsou formulovány podle otázek, které byly položeny v Kapitole 1. Tyto závěry jsou přímo aplikovatelné pro oceňovací praxi. Vedle toho mohou být shrnutím a rozšířením aktuální oceňovací teorie v České republice a východiskem pro její další rozvoj.

Je třeba mít na paměti, že některé závěry této práce mohou být poplatné aktuální situaci na finančním trhu v době publikace. S vývojem finančního trhu – např. co do šíře obchodovaných nástrojů a jejich likvidity – mohou tyto závěry vyžadovat v budoucnu přezkum. Při takovém přezkumu může přijít vhod metodologie, která je v této disertační práci představena.

Ve zbylé části této kapitoly jsou uvedeny konkrétní závěry práce včetně příslušné argumentace. Též jsou nastíněna omezení těchto závěrů a možné cesty pro další rozvoj a výzkum.

Závěr 1. Korunové úrokové swapy jsou vhodným instrumentem pro bezrizikovou výnosovou míru v českém prostředí.

Kapitola 2 poskytuje ucelený pohled na využití úrokových swapů (IRS) při stanovení bezrizikové míry ve výnosovém ocenění v prostředí českého trhu. Nejprve testuje splnění pěti požadavků kladených na korektní způsob stanovení bezrizikové výnosové míry. Je ukázáno, že korunové úrokové swapy splňují všechny podmínky:

- Užití tržních kótací úrokových swapů zcela naplňuje požadavek tržnosti, tudíž metoda je vhodná pro tržní ocenění.
- Úrokové swapy jsou dostatečně bezrizikové: sazby desetiletých úrokových swapů v USD kolísají méně než desetileté výnosy amerických dluhopisů a jsou i méně korelované s akciovým indexem SP500 (sledováno v letech 2000-2012). Ačkoli zde provedená analýza není rozsahem vyčerpávající a provedení studií za delší období nebo neamerický trh by bylo žádoucí, tímto pohledem se jeví swapy z hlediska tržního rizika dokonce jako méně rizikové než převážně užívané státní dluhopisy. Navíc přestože kreditní riziko swapových protistran může být nenulové a výrazně vyšší než u centrálních vlád států (Schich, 1997), post-tradové techniky snižující kreditní riziko swapů – centrální zúčtování a kolateralizace – může zvláště u dlouhých swapů snížit kreditní riziko pod úroveň kreditního rizika vlád. V řadě zemí včetně ČR jsou delší swapové sazby pod úrovní výnosů delších státních dluhopisů.¹³⁹

¹³⁹ Např. 1. září 2017 se třicetiletý swap kótoval na 1,96 % a výnos 30letého dluhopisu (splatného v roce 2057) byl 2,26 %. Pokud si uvědomíme, že dluhopis podléhá benevolentnějšímu regulatornímu

- Na trhu existuje dostatek korunových swapových splatností, aby swapové kontrakty mohly být základem pro konstrukci celé bezrizikové výnosové křivky. Bezriziková míra diferencovaná podle příslušné splatnosti je českou (Mařík et al., 2011) i zahraniční (Damodaran, 2008) oceňovací literaturou považována za správnější přístup, ve srovnání s rozšířenou praxí jedné bezrizikové míry aplikované na všechny horizonty.
- S výjimkou mírných problémů u dvacetiletého korunového swapu se nezdá, že by menší počet swapových obchodů s delšími splatnostmi měl výraznější dopad do swapových sazeb. U IRS se splatností 12, 15 a do jisté míry i 20 let nebylo pozorováno výrazné zhoršení charakteristik likvidity, jako jsou vyšší bid-ask spready nebo kolísající či naopak nulové mezidenní změny výnosů.

Dále je poskytnut postup výpočtu nutný k implementaci metody, včetně přesnějšího překlenovacího řešení pro horizonty, pro které nejsou k dispozici swapové kontrakty. Je k tomu využita metoda Fama a Bliss (Fama a Bliss, 1987) předpokládající konstantní forwardovou sazbu mezi dvěma nejbližšími splatnostmi. Výhody této metody jsou dále popsány v článku Dvořák (2016a) z kapitoly 3. Aplikace tohoto postupu vyžaduje použití numerických metod řešení.

Metoda úrokových swapových sazeb se tak zdá být dobrou alternativou k v této oblasti běžně užívané praxi odvozování bezrizikové výnosnosti ze státních dluhopisů.

Závěry o likviditě korunového swapového trhu jsou v souladu s později zveřejněnými závěry ČNB a EIOPA, když tržní data o CZK IRS do splatnosti 15 let považují za vhodná pro konstrukci bezrizikové křivky pro účely oceňování dlouhodobých pojistných závazků (EIOPA 2018). V případě použití v regulaci je dostatečná likvidita trhu ještě důležitější než ve většině případů oceňování, protože volba nelikvidního trhu pro konstrukci bezrizikové křivky by mohla motivovat pojišťovny k manipulacím s trhem za účelem vylepšení ukazatelů solventnosti.

K závěrům je možné mít tři námitky. První se týká obtížnosti bezrizikovou sazbu využít k investování. Druhá se týká existence malého objemu prokazatelných skutečných obchodů. Třetí se týká úvěrového rizika vtěleného do IRS.

CZK IRS jsou zajišťovacím nebo spekulativním derivátovým nástrojem. Jejich kótace jsou ověřeny trhem. Nicméně investor, který „investuje“ do úrokového swapu, obdrží swapovou sazbu po dobu trvání kontraktu nikoli výměnou za jednorázovou platbu v okamžiku sjednání swapu (jako by to bylo například u investice do státního dluhopisu), ale výměnou za krátkou sazbu mezibankovního trhu – tříměsíční nebo šestiměsíční Pribor. Zhodnocení „investice do swapu“ je tak pro investora poplatné poplatné tomu, za kolik je investor schopen rolovat krátkodobý úvěr navázaný na Pribor nebo jaké je zhodnocení investice navázané na Pribor, jehož úrokový výnos swap zajišťuje. Na swap je ideální nahlížet jako na zajištění dluhopisu s proměnlivým kupónem s nulovým úvěrovým rizikem oproti sazbě mezibankovního trhu (tj. s kupónem Pribor + 0%). Pak zhodnocení této investice odpovídá swapové sazbě. Uznáváme ale, že konstrukce swapu zastírá souvislost mezi bezrizikovou mírou a výnosností, kterou lze s použitím tohoto nástroje dosáhnout. Pokud ale chceme, aby bezriziková míra představovala „cenu peněz“,

zacházení a může být na rozdíl od swapu využít jako kolaterál, dojdeme k závěru, že vnímané úvěrové riziko swapu je zřejmě nižší než u dluhopisu.

spíše než výnosnost konkrétního investičního instrumentu, nemusí být nemožnost investovat do „ceny peněz“ na škodu.

Trh CZK IRS je OTC trhem, tudíž pro něj chybí dobré informace o objemech uskutečněných obchodů. To napravují až údaje z registrů obchodních údajů podle regulace EMIR, kam musí tržní účastníci z EU hlásit každý jednotlivý derivátový obchod. Ukazuje se, že počet a objem obchodů na delším konci je menší, než se čekalo. Nicméně zde je důležité si uvědomit, že v minulosti vysoký objem obchodů ještě automaticky nezaručuje vysokou likviditu i do budoucna. Klíčová je připravenost tvůrců trhu tyto obchody uzavírat za ceny na úrovni kótací, které jsou oceňovatelům k dispozici (např. v systémech Bloombergu nebo Reuters). Alespoň podle anekdotické evidence, se zdá, že pokud je potřeba uzavřít podobný obchod, najde se tvůrce trhu ochotný tvořit protistranu.

Na druhou stranu, ani objem obchodů s českými státními dluhopisy není závratný (za březen 2018 byl průměrný denní objem obchodů s každým dluhopisem 18,3 mil. Kč a 12,9 mil. Kč u dluhopisů se splatností nad 10 let, srov. s Obr. 1.3 pro IRS, kde jsou nominálně obchodovaných IRS v miliardách Kč¹⁴⁰). Navíc část obchodů s českými státními dluhopisy nemusí probíhat za tržní ceny, ale za ceny dohodnuté mezi kupujícím a prodávajícím mimo trh. Volba českých státních dluhopisů jakožto zdroje dat pro bezrizikovou míru tak problém nízkého objemu prokazatelně proběhlých obchodů nevyřeší.

Závěrem lze namítnout, že IRS obsahují element úvěrového rizika. To je vtěleno v referenčních sazbách mezibankovního trhu¹⁴¹, neboť korunové IRS směňují swapovou sazbu za aktuální tříměsíční nebo šestiměsíční referenční sazbu Pribor. Pribor jako referenční cena nezajištěného mezibankovního úvěru odráží mimo jiné riziko selhání protistrany, kterou je významná banka, na krátkodobém horizontu. EIOPA (2018, část 5.c) například od swapových sazeb odečítá 10-35 bazických bodů na celé křivce (pro CZK je to 10 bodů). Postup této korekce je ale pro CZK značně mechanistický.

Je obtížné přijít se skutečně fundovaným způsobem korekce, a proto ji přenecháváme dalšímu výzkumu. K tomu by bylo nutné odhadnout pravděpodobnost selhání velké banky na horizontu 3 nebo 6 měsíců – ať již z dat ratingových agentur o selhání institucí s podobným ratingem, z kótací CDS vypsanych na tyto instituce nebo z rozílů v cenách zajištěných a nezajištěných úvěrů téže splatnosti. Všechny tyto metody v prostředí ČR ale naráží na omezení v podobě absence kvalitních tržních dat.

Na druhou stranu, ani dluhopisy ČR ani dluhopisy vlád s nejvyšším ratingem nejsou zcela bezrizikové. Ke konci dubna 2018 byl 5letý CDS německé vlády obchodován za 5 bb, vlády USA za 17 bb a vlády CZ za 34 bb. I u státních dluhopisů by tak bylo žádoucí provádět úpravu výnosů o úvěrové riziko.

¹⁴⁰ Je pravda, že u IRS nedochází k platbám předem a výměnám jistiny, na druhou stranu subjekt vstupující do IRS získává pozici odpovídající nominále IRS.

¹⁴¹ Pozice v IRS se běžně kolateralizují, tudíž riziko protistrany je u nich marginální. To je také důvodem, proč sazby velmi dlouhodobých IRS leží pod dluhopisy vlád stejné splatnosti, s výjimkou těch nejdůvěryhodnějších vlád.

Závěr 2. Svenssonova metoda je použitelná pro české prostředí, ale obsahuje jistá omezení.

V rámci posouzení postupu podle Svensson (1994) bylo v kapitole 3 konstatováno, že podobné modely založené na prokládání dat nejsou filozoficky zcela konzistentní s tržním oceněním, protože neužívají tržní data v maximální možné míře. Funkce s 6 parametry prokládající výrazně vyšší počet na trhu obchodovaných dluhopisů nemůže konzistenci zaručit. Svenssonova funkce ovšem dokáže velmi dobře prokládat tržní data, alespoň pokud se jedná o skutečné tvary výnosových křivek z českého trhu: chyby se pohybují v řádech do 2 bazických bodů. Z toho důvodu lze model bez výhrad doporučit pro konstrukci bezrizikových měř z českých dluhopisů, a to i pro ocenění tržní.

Je však třeba mít na paměti 2 omezení modelu. Zaprvé, není vhodné do výsledné funkce dosazovat splatnostní horizonty delší než je splatnost nejdelšího instrumentu užitého pro výstavbu modelu, protože na těchto horizontech je Svenssonova funkce fikcí bez těsného vztahu k trhu. Zejména pak užívání nekonečného horizontu jako odhadu dlouhodobé rovnovážné úrokové míry může vést ke katastrofálním výsledkům. Naopak možností je použít explicitní hodnotu dlouhodobé rovnovážné míry a Svenssonovu funkci položit k ní (např. Jakubík a Žigraiová, 2017).

Zadruhé, jak již dříve poukázali Slavík (2001) nebo Kladívko (2010), model implementovaný na české prostředí se jeví jako extrémně citlivý na vstupní data. Jeho parametry proto nereprezentují setrvalý stav. Z tohoto důvodu není vhodné používat pro jiné dny, než na kterých byly parametry odhadnuty. Ještě méně je vhodné je používat pro jiné trhy, než odkud parametry pochází. Konkrétně v případě užívání německých parametrů pro aproximaci parametrů bezrizikové míry na českém trhu po vzoru Maříková a Mařík (2012) vnášíme mnohdy nemalou chybu vzniklou odlišnou rizikovostí státních dluhopisů, odlišnými podmínkami na peněžním trhu a odlišnými očekáváními ohledně vývoje úrokových měř. Není proto možné si parametry z německého trhu jednoduše „vypůjčit“. Jednou schůdnou možností je převzít celý CAPM model např. z německého trhu včetně bezrizikové míry sestrojené Svenssonovou funkcí na německých státních dluhopisech a CAPM posléze adaptovat pro český trh. Druhou možností, kterou autor preferuje, je odhadnout Svenssonovu funkci na českých dluhopisových datech.

Náprava problémů s ne zcela přesným prokládáním dat je nemožná. Chybu odhadu by snížilo (nikoli odstranilo) použití ještě vyššího počtu parametrů. To by ale dále zkomplikovalo jejich odhad a mohlo vést k nezamýšlenému průběhu funkce mimo splatnosti pozorovaných bodů. Naopak, pro zjednodušení implementace a zvýšení stability odhadů by se v prostředí českého trhu nabízela opačná cesta – volit jednodušší přístup Nelson a Siegel (1987), který povede k větší robustnosti odhadů. Zjednodušení odhadů by pomohlo fixování hodnoty parametrů pro umístění bodů zakřivení (λ) na obvyklých úrovních po vzoru Diebold a Li (2006) při odhadu modelu.

Závěr 3. Fama-Bliss jako metoda pro tržní stanovení bezrizikovou výnosovou míru.

V reakci na Závěr 2 hledá kapitola 4 alternativu pro případ, že chceme oceňovat maximálně tržně a minimalizovat expertní zásahy. Řešení nachází v metodě Famy a Blisse (Fama a Bliss 1987), která předpokládá, že forwardová křivka je mezi každými dvěma nejbližšími splatnostmi obchodovaných dluhopisů plochá. Ne, že by tento předpoklad byl obzvláště realistický, ale jedná se o předpoklad nejjednodušší a při absenci dalších informací nejhůře zpochybnitelný. V případě, že problémy s daty o

cenách konkrétních dluhopisů jsou známy, je možné použít vhodnější přístupy k eliminaci jejich nežádoucího vlivu – například je vyloučit ze vzorku úplně nebo snížit jejich váhu – než tento vliv eliminovat regresním proložením Svenssonovou nebo jinou funkcí. Postup Fama a Bliss byl využit i v bootstrapu dat pro IRS pro splatnosti nad 10 let v kapitole 2.

Metoda Fama-Bliss má 5 charakteristických prvků.

1. Užitý předpoklad o chování forwardové křivky je nejjednodušší možný. Tím je tento předpoklad přitažlivý. Tento předpoklad je volen v řadě prací z oblasti finanční ekonomie a využívá jej např. Hordahl et al. (2004), Diebold a Li (2006), Adrian et al. (2008), Ludvigson a Ng (2009), Koopman et al. (2010), Pribsch (2013), a studie používající dataset CSRP. Pod názvem „step-function forward“ je tato metoda implementována i v systému Bloomberg.
2. Užitý postup je jednoznačný. Pokud jej budou aplikovat různí analytici mající k dispozici stejná data, dospějí k totožným výsledkům. V tom se metoda liší od metod Nelson-Siegel nebo Svensson (dále NSS), kde se nabízí volba optimalizačního kritéria (součet cenových versus součet výnosových odchylek; Svensson 1994, Hladíková a Radová 2012), způsobu optimalizace (metoda nejmenších čtverců; metoda maximální věrohodnosti; Schich 1997); a dále mechanismus numerické optimalizace a volba výchozího bodu po optimalizaci (různé hodnoty dávají různé výsledky; Slavík, 2001). Dále je otázkou, zda volit specifikaci Nelson-Siegel nebo Svensson, případně specifikaci s ještě vyšším počtem parametrů. Nastává rovněž otázka, zda předem omezit některé parametry odhadovaných funkcí, aby metoda dospěla vždy ke ekonomicky rozumným výsledkům. BIS (2005) přináší názorný přehled diverzity nastavení modelů, které pro konstrukci výnosových křivek využívají hlavní centrální banky. Pokud místo NSS volíme další z častých metod konstrukce křivek – vyrovnávací spliny (Fisher et al. 1995 nebo Waggoner 1997) – je otázkou stupeň splinu (tj. derivace kterého řádu ještě mají být spojité, byť zde víceméně panuje praktický konsenzus na kubických splinech; BIS 2005) a otázka parametru míry vyrovnání (volba mezi vyšší hladkostí výsledné funkce a kvalitou proložení), případně způsob jeho diferenciaci podle segmentu výnosové křivky (Waggoner 1997). Afinní modely (Vasicek 1977 nebo Ho a Lee 1986) zase vyžadují specifikaci procesu, podle kterého se budou v budoucnu vyvíjet krátkodobé sazby.
3. Metoda oceňuje na trhu obchodované dluhopisy konzistentně. To znamená, že výslednou křivkou diskontovaná hodnota peněžních toků z každého dluhopisu se přesně rovná jeho tržní ceně.
4. Metoda je ve srovnání s metodami NSS, spliny a afinními modely výpočetně jednoduchá.
5. Metoda není robustní vůči chybám v cenách dluhopisů. Pokud je údaj o tržní ceně špatný (ve smyslu neodůvodněně nízký či vysoký), projeví se tento charakter v neúměrně vysoké či naopak nízké forwardové sazbě pro segment blízký jeho splatnosti. Výše řečené ovšem nebrání vývoji dokonalejších modelů výnosových křivek, které dokáží lépe korigovat nedokonalosti v dluhopisových datech (např. Waggoner 1997), včetně otázky likvidity u českých státních dluhopisů (ČNB 2016), a povedou k realističtějšímu tvaru výnosové křivky.

Závěrem lze shrnout, i když předpoklad po částech konstantní forwardové sazby není dokonalý z hlediska realističnosti, neutrálnost, univerzálnost a srozumitelnost

předpokladu předurčuje metodu Fama-Bliss do role benchmarkové metody, se kterou se ostatní metody mohou porovnávat. Zvláště užitečná je proto v tržním nebo objektivizovaném ocenění, kde je nutná maximální přezkoumatelnost výpočtu.

Tato metoda se samozřejmě nehodí pro všechny aplikace. Například není vhodná pro oceňování krátkodobých finančních derivátů, kde je nutné korigovat všechny iregularity krátkého konce výnosové křivky. Na druhou stranu, kolísání jednotlivých segmentů forwardové křivky v proložení metodou Fama-Bliss může být vhodným východiskem pro hledání těchto iregularit.

Závěr 4. Konzistentní průměr řeší problém volby mezi aritmetickým a geometrickým průměrem výnosů pro měření výnosnosti investic.

Konstrukce konzistentního průměru spočívá ve třech krocích. Nejprve se stanoví horizont prognózy pro předpovědi výnosnosti (nebo relevantní období pro měření realizovaného zhodnocení). Na tomto horizontu se simulují všechny možné kombinace ročních vývoje, které se staly ve sledovaném historickém období. Pro každou simulaci se následně spočítá průměrný realizovaný výnos jako geometrický průměr. Nakonec se použije očekávaná hodnota (tedy aritmetický průměr) z těchto realizovaných výnosů. Je třeba podotknout, že i na stejném vzorku podkladových dat se konzistentní průměr liší podle délky horizontu.

Vzhledem k teoretické komplikovanosti lze otázku lze nejlépe ukázat na stylizovaném případě. Mějme historicky realizované roční výnosy z akciového indexu 1, 2, 5, 7 a 14 procent. Aritmetický průměr těchto hodnot je 5.80, zatímco geometrický 5.70. Otázka však zní takto: pokud investor vloží 100 Kč do instrumentu na 10 let (aby tato doba odpovídala „těžišti“ peněžních toků a splatnosti 10letého dluhopisu), jaké průměrné zhodnocení může očekávat na období 10 let?

Při užití aritmetického průměru dostáváme na konci desetiletého období 175.7 Kč, u geometrického 174.1 Kč. Pokud ale zvážíme všechny možné kombinace jednoletých výnosů, které mohou za období uvažovaných 10 let nastat, pak jejich střední hodnota průměrných 10letých zhodnocení je 5.71%, což dává 174.3 Kč. Tento průměr, nazývaný v kapitole 5 konzistentní průměr pak může sloužit jako užitečné vodítko pro rozhodování, jaký zda upřednostnit geometrický nebo aritmetický průměr. Je vidět, že geometrický průměr je pro horizont 10 let konzistentnímu průměru daleko blíže než aritmetický.

Investiční horizont má při výpočtu klíčovou roli. Pokud je horizont jednoletý, pak je aritmetický průměr roven konzistentnímu a volba geometrického průměru je chybná. Naopak geometrický průměr konverguje ke konzistentnímu pro nekonečný horizont.

Je proto vhodné používat buďto přímo konzistentní průměr z kapitoly 5, nebo pro oceňování většiny dlouhodobých aktiv průměr geometrický jako jeho aproximaci.

Literatura

- [1] ADRIAN, T., CRUMP, R. K., MOENCH, E. (2008). *Pricing the Term Structure with Linear Regressions*. Federal Reserve Bank of New York Staff Report No. 340. Revised April 2013.
- [2] BANK ON INTERNATIONAL SETTLEMENTS (2005). *Zero-coupon yield curves: technical documentation*. BIS Papers No. 25.
- [3] ČESKÁ NÁRODNÍ BANKA (2016). *Zpráva o finanční stabilitě 2015/2016*.

- [4] DAMODARAN, A. (2008): *What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block*. Stern School of Business. New York University. [downloaded: 7.7.2013]. Available from <http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf>.
- [5] DIEBOLD, F. X., LI, C. (2006). *Forecasting the term structure of government bond yields*. Journal of Econometrics 130, 337-364.
- [6] DVOŘÁK, M. (2016a). *Bezrizikové sazby ze státních dluhopisů: metoda Fama-Bliss*. Oceňování : čtvrtletník. 2016. sv. 9, č. 3, s. 55-71. ISSN 1803-0785
- [7] European Insurance and Occupational Pensions Authority (EIOPA) (2018). *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*. 31 January 2018.
- [8] FAMA, E. F., BLISS, R. R. (1987). *The Information in Long-Maturity Forward Rates*. American Economic Review 77, 4, 680-692.
- [9] FISHER, M., NYCHKA, D., ZERVOS, D. (1995). *Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines*. Finance and Economics Discussion Series Working Paper No. 95-1, Federal Reserve Board.
- [10] HLADÍKOVÁ, H., RADOVÁ, J. (2012). *Term Structure Modelling by Using Nelson-Siegel Model*. European Financial and Accounting Journal 7,2, 36-55.
- [11] HO, T. S. Y., LEE, S. B. (1986). *Term structure movements and pricing interest rate contingent claims*. Journal of Finance, 41, 5, 1011-1029.
- [12] HORDAHL, P., TRISTIANI, P., VESTIN, D. (2004). *A joint econometric model of macroeconomic and term structure dynamics*. ECB Working Paper Series No. 405.
- [13] JAKUBÍK, P., ŽIGRAIOVÁ, D. (2017). *Updating the Ultimate Forward Rate over Time: A Possible Approach*. ČNB Working Paper 3/2017.
- [14] KLADÍVKO, K. (2010). *The Czech Treasury Yield Curve from 1999 to the Present*. Czech Journal of Economics and Finance 60, 4, s. 307-335.
- [15] KOOPMAN, S. J., MALLEE, M. I. P., VAN DER WEL, M. (2010). *Analyzing the Term Structure of Interest Rates Using the Dynamic Nelson-Siegel Model With Time-Varying Parameters*. Journal of Business & Economic Statistics 28, 3, 329-34
- [16] LUDVIGSON, S. C., NG, S. (2009). *Macro factors in Bond Risk Premia*. Review of Financial Studies 22, 12, 5027-5067.
- [17] MAŘÍK, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.
- [18] MAŘÍKOVÁ, P., MAŘÍK, M. (2012). *Odvozování bezrizikové výnosové míry z tržních dat pomocí Svenssonovy metody*. Odhadce a oceňování majetku 4/2012, s. 67-79.
- [19] NELSON, C. R., SIEGEL, A. F. (1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Journal of Business 60, 473-489.
- [20] PRIEBSCH, M. A. (2013). *Computing Arbitrage-Free Yields in Multi-Factor Gaussian Shadow-Rate Term Structure Models*. Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series No. 2013-63.

- [21] SCHICH, S. T. (1997). *Estimating the German term structure*. Discussion paper 4/97. Frankfurt Am Main: Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank.
- [22] SLAVÍK, M. (2001). *Odhad časové struktury úrokových sazeb z cen domácích dluhopisů*. Finance a úvěr, 51,11, 591-606.
- [23] SVENSSON, L. E. O. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. Seminar Paper No. 579. Stockholm: Institute for International Economic Studies, University of Stockholm.
- [24] VASICEK, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5, 177-188.
- [25] WAGGONER, D. F. (1997). *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper No. 97-10.