Bezrizikové sazby ze státních dluhopisů: metoda Fama-Bliss

*Michal Dvořák**

1 Úvod

V posledních 5 letech vyšla v české literatuře řada příspěvků na téma bezrizikových výnosových měr při oceňování podniků a dalších dlouhodobých aktiv nebo pasiv (Mařík et al. 2011, Maříková – Mařík 2012, Dvořák 2014, Dvořák 2014a). Tradiční a v českém prostředí velmi rozšířené[1] použití výnosu do doby splatnosti dlouhodobého státního dluhopisu (ať již v podobě historického průměru nebo údaje ke dni ocenění) jako bezrizikové míry pro všechny budoucí výnosové toky z oceňovaného aktiva se dostává do stále větší defenzivy. Moderní přístupy jsou založeny na použití celé výnosové křivky, tj. různých bezrizikových měr pro různé splatnosti. Požadavek konstrukce celé výnosové křivky vyžaduje kromě dostupnosti samotných tržních cen státních dluhopisů různých splatností rovněž znalost metody na odvození výnosové křivky.

Pro konstrukci celé výnosové křivky jsou často užívány metody založené na přístupech Nelson-Siegel (1987) nebo Svensson (1994). Ty však trpí určitými problémy, zejména neschopností přesně zreplikovat ocenění tržně obchodovaných dluhopisů a závislostí výsledků na konkrétní specifikaci výpočtu. Cílem tohoto článku je proto představit alternativní způsob, publikovaný v článku Fama-Bliss (1987). Bude poukázáno na jeho *koncepční* výhody při tržním nebo objektivizovaném oceňování dlouhodobých aktiv.[2]

Článek je strukturován následujícím způsobem. V kapitole 2 jsou diskutovány problémy při stanovování bezrizikových měr pro oceňovací účely. V kapitole 3 je představena technika výpočtu metodou Fama-Bliss. V kapitole 4 je pro lepší názornost ukázán numerický výpočet metodou Fama-Bliss na datech z trhu státních dluhopisů České republiky. V kapitole 5 jsou popsány obecné charakteristiky metody Fama-Bliss, zejména ve srovnání s oblíbenou metodou Nelson-Siegel-Svensson. Kapitola 6 obsahuje závěrečné shrnutí.

2 Problémy při stanovování bezrizikových měr pro oceňovací účely

Pro korektnost ocenění je nutné, aby každý výnosový tok byl porovnán s výnosností alternativní investice se stejnou dobou do splatnosti. Například dividenda nastávající za 2 roky by měla být porovnána s instrumentem přinášejícím výnos za 2 roky. Tím pádem potřebujeme nikoli jednu bezrizikovou míru, nýbrž celou sérii bezrizikových měr, které budou přiřazovány jednotlivým výnosovým tokům podle jejich splatnosti. K tomu je potřeba

---

* Ing. Michal Dvořák, Katedra měnové teorie a politiky, Fakulta financí a účetnictví, Vysoká škola ekonomická v Praze a Česká národní banka. Kontaktní email: michal@michaldvorak.eu. Článek je zpracován jako jeden z výstupů výzkumného projektu IGA VŠE F1/05/2014 „Finanční a hospodářský cyklus“.

[1] Dotazníkové šetření mezi 42 českými znalci a znaleckými ústavy v Hanzal (2015) o používaných přístupech ke stanovení bezrizikové míry potvrdilo dominanci metody založené na výnosu dlouhodobého dluhopisu.

[2] Bezrizikové míry získané metodou Fama-Bliss z českých korunových státních dluhopisů budou pravidelně aktualizovány a publikovány na stránkách Institutu oceňování majetku Vysoké školy ekonomické http://iom.vse.cz .

dostatečný počet na trhu obchodovaných splatností instrumentů, ze kterých lze bezrizikovou míru odvodit. Z hlediska podkladových instrumentů jsou víceméně užívány pouze (1) úrokové swapy v příslušné měně a (2) státní dluhopisy v příslušné měně, přičemž úrokové swapy mají navrch.[3]

Přístup používající **úrokové swapy** je z metodologického pohledu jednodušší a je prezentován např. v Mařík et al. (2011) nebo Dvořák (2014). Přístup založený na **státních dluhopisech**, které jsou v prostředí ČR i dalších zemí světa zpravidla kupónové[4], je komplikován v čase se měnící zbytkovou splatností dluhopisů na trhu a nepravidelným rozložením okamžiků výplat jejich kupónů a jmenovitých částek. V takovém případě není možné použít postup zvaný bootstrapping v čisté učebnicové podobě (Mařík et al. 2011, s. 291-295), ale je třeba se uchýlit k předpokladu o chování úrokových měr (blíže např. Dvořák 2014a).

Často užívaným předpokladem o chování úrokových měr je **Nelsonova-Siegelova** (1987) nebo **Svenssonova** (1994) funkce (dále zkráceně NSS). NSS předpoklad v oceňování využívá německá oceňovací praxe. Pro české prostředí se jím zabývá např. Maříková – Mařík (2012) nebo Dvořák 2014a.[5] Tvar NSS funkce je nelineární, z čehož pramení určité technické problémy s jejím odhadem (Slavík 2001, Kladívko 2010, Gilli et al. 2010, Dvořák 2014). Navíc je metoda založena na regresním proložení známých bodů, čímž odvozené spotové sazby povedou k jinému ocenění použitých dluhopisů, než je pozorováno na trhu. Rozdíl je však ve většině případů zanedbatelný (Dvořák 2014a).

Jiný předpoklad je použit v článku **Fama – Bliss** (1987). Je založen na představě, že mezi okamžiky, pro které máme k dispozici dluhopis příslušné splatnosti, je forwardová sazba konstantní. Protože se jedná o nejjednodušší metodu, může být považována za určitý benchmark pro konstrukci výnosových křivek. Užitečnost předpokladu je doložena hojným používáním metody ve finanční ekonomii (např. Hordahl et al. 2004, Diebold – Li 2006, Adrian et al. 2008, Ludvigson – Ng 2009, Koopman et al 2010, Priebsch 2013, a studie používající dataset CSRP[6]). Pod názvem „step-function forward“ je tato metoda implementována i v systému Bloomberg.[7] Následující kapitoly se proto zabývají touto metodou.

V zájmu předejít nenaplnění očekávání je vhodné rovněž zmínit, co cílem článku není. Stranou ponecháme (1) otázku, zda je vhodnější užití swapových sazeb či státních dluhopisů jako podkladových instrumentů pro stanovení bezrizikové sazby a (2) otázku likvidity u českých státních dluhopisů (ČNB 2016) a řešení z toho vyplývajících komplikací. Dále (3) cílem článku rozhodně není diskutovat metodu v kontextu **jiných aplikací** bezrizikových výnosových měr, než je tržní oceňování dlouhodobých aktiv či pasiv. Oceňováním

---

[3] Např. metodologie Evropského orgánu pro pojišťovnictví a zaměstnanecké penzijní pojištění (EIOPA) se při oceňování dlouhodobých závazků z pojištění výslovně přiklání k užívání úrokových swapů (EIOPA, 2016). Státní dluhopisy používá až jako náhradní řešení, není-li swapový trh v dané měně dostatečně rozvinutý a likvidní. Pro CZK metodologie používá EIOPA úrokové swapy.

[4] Výjimku tvoří krátkodobé dluhopisy, v ČR nazývané pokladniční poukázky. Ty mají ovšem obvyklou splatnost do jednoho roku. Pro diskontování peněžních toků z dlouhodobé investice (např. podniku) je pak třeba splatností spíše dlouhodobých. Jednotlivě obchodované kupóny a nominále (tzv. stripy) naopak trpí nízkou likviditou a malou transparentností jejich tržních cen.

[5] Výsledky založené na odhadu německé centrální banky na německých státních dluhopisech jsou publikovány Institutem oceňování majetku VŠE (http://iom.vse.cz/odborna-cinnost/svenssonova-metoda/).

[6] http://www.crsp.com/products/documentation/fama-bliss-discount-bonds-%E2%80%93-monthly-only. Dataset i většina uvedených studií však metodou Fama-Bliss získané výnosové křivky dále upravuje.

[7] Vizte interpolation method 3 v materiálu Bloomberg (2009).

dlouhodobých aktiv myslíme zejména oceňování neobchodovaných aktiv, jako jsou účasti v nekótovaných podnicích nebo nemovitosti, které nezřídka provádějí znalci, či dlouhodobých závazků (např. v životním pojištění nebo výplat penzí). V těchto případech se pracuje s méně podrobnou strukturou peněžních toků (obvykle roční), ignoruje se krátký konec výnosové křivky (obvykle do 1 roku) a vyžaduje se, aby z procesu výpočtu byly co nejvíce vyloučeny subjektivní vlivy. V jiných aplikacích jsou naopak upřednostněna jiná kritéria. Při oceňování dluhopisů, derivátů či strukturovaných produktů prováděných tvůrci trhu nebo institucionálními investory je zapotřebí podrobnější výnosové křivky na krátkém konci, je důležité eliminovat i drobné nepřesnosti v tržních cenách podkladových instrumentů a subjektivita při způsobu výpočtu není překážkou. Při užití centrálními bankami a akademií k extrakci očekávání tržních účastníků (např. Kim – Orphanides, 2007) je naopak potřeba snížit dimenzionalitu reprezentace výnosové křivky. Totéž je potřeba v dynamických aplikacích, sloužícím k odhadování trajektorie výnosových křivek (např. Diebold – Li, 2006). V těchto případech metoda Fama-Bliss není vhodná.[8] Konečně, (4) cílem článku není hodnotit metody kvantitativně. A to z důvodu, že neexistuje způsob, jak takové hodnocení objektivně provést. Neexistuje nic jako „správná“ výnosová křivka, vůči které by bylo možné křivky konstruované pomocí posuzovaných metod porovnat. Podobná porovnání nabízí např. Jeffrey et al. (2006).[9]

3 Konstrukce výnosové křivky metodou Fama-Bliss

Základním prvkem přístupu je předpoklad o chování forwardové sazby. Forwardovou sazbou je myšlena (typicky krátkodobá) úroková sazba platná pro okamžik v budoucnosti. Lze ji odvodit z aktuálních spotových sazeb s různými splatnostmi[10]. Fama-Bliss (1987) předpokládá, že forwardová sazba je mezi nejbližšími známými okamžiky konstantní. To znamená, že znázorníme-li forwardovou sazbu jako funkci času, pro který je tato sazba platná, bude její průběh schodovitý (vizte Obr. 2). „Schody“ (tj. body nespojitosti) budou nastávat v momentech splatnosti na trhu obchodovaných instrumentů. Velikost forwardových sazeb je přitom stanovena tak, aby těmito sazbami diskontovaná současná hodnota peněžních toků z každého dluhopisu se přesně rovnala jeho tržní ceně.

Obecný postup konstrukce spotové křivky lze formálně popsat následujícím způsobem.

1. Získají se informace o dluhopisových instrumentech, ze kterých chceme výnosovou křivku konstruovat. V praxi to budou instrumenty vydané stejnou entitou, bezkupónové nebo s pevným kupónem[11], často s vyšší než minimální

[8] Jeden z recenzentů odmítl metodu Fama-Bliss jako „příliš jednoduchou“ a nezohledňující 30 let vývoje v metodologii konstrukce výnosových křivek. Tento vývoj je však důležitý zejména v aplikacích, které nejsou předmětem tohoto článku.

[9] Způsoby měření mohou být následující. (1) porovnání, jak dobře oceňuje obecný tvar křivky na trhu obchodované dluhopisy, (2) porovnání, jak dobře oceňuje obecný tvar křivky na trhu obchodované dluhopisy, které nebyly použity ke konstrukci prokládací křivky, nebo (3) porovnání kvality proložení nepozorovatelné reality z dat, která vychází ze simulované „správné křivky“ po přidání šumu. Tvar „správné křivky“ a podoba „šumu“ vyžadují učinit ad-hoc předpoklady, které ovšem omezují obecnost obdržených výsledků.

[10] Jako forwardová sazba se též označují sazby sjednané v rámci derivátových kontraktů FRA. V nich jedna strana v budoucnu platí dnes sjednanou sazbu a druhá strana platí v budoucnu aktuální sazbu mezibankovního trhu. Zde představená metoda Fama-Bliss informace z kótací FRA instrumentů nevyužívá.

[11] Dluhopisy s proměnlivým kupónem lze z hlediska úrokového rizika považovat za dluhopis se splatností rovnou příštímu okamžiku přecenění. Z hlediska kreditního rizika je však proměnlivě úročený dluhopis rizikovější, tudíž toto ztotožnění by vedlo k příliš vysoké spotové sazbě, a bylo by proto značně distorzní.

předdefinovanou dobou splatnosti[12] a bez přidružených opcí[13]. Informace musí být dostatečné k získání údaje o aktuální tržní ceně dluhopisu a stanovení kalendáře plateb z dluhopisů.

2. Dluhopisy se seřadí vzestupně podle zbytkové splatnosti. Máme-li n dluhopisů, označme jako

   $T_1, T_2, \ldots, T_n$ jejich splatnosti (v letech),

   $P_1, P_2, \ldots, P_n$ jejich tržní ceny v peněžních jednotkách včetně naběhlého úroku (neboli alikvótního úrokového výnosu),

   $c_1, c_2, \ldots, c_n$ jejich kupónové sazby (v procentech na roční bázi),

   $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n$ frekvenci úrokových plateb (např. $\tau_3 = 4$ udává, že dluhopis s třetí nejkratší splatností poskytuje 4 úrokové platby za rok) a

   $N_2, \ldots, N_n$ jejich nominále.[14]

3. Forwardová sazba f_1 pro horizont až do splatnosti prvního dluhopisu (tj. T_1) se vypočte ze vzorce

$$P_1 = \frac{N_1}{(1+f_1)^{T_1}} + \sum_{i=1}^{d_1} \frac{\frac{c_1}{\tau_1} \cdot N_1}{(1+f_1)^{T_1 - \frac{i-1}{\tau_1}}}, \qquad [1]$$

kde d_1 je počet zbývajících kupónových plateb (včetně té placené až spolu s nominále), který lze vypočítat zaokrouhlením dolů výrazu T_1/τ_1. První sčítanec na pravé straně rovnice [1] odpovídá současné hodnotě nominále. Druhý sčítanec na pravé straně rovnice [1] odpovídá součtu současných hodnot jednotlivých kupónů.

4. Spotová sazba vyjádřená jako funkce splatnosti $S(t)$, tj. roční sazba platná na t let, je na tomto splatnostním úseku totožná s forwardovou sazbou, tj.

$$S(t) = f_1, \qquad \text{pro} \qquad t \le T_1 \qquad [2]$$

[12] Chování dluhopisů těsně před splatností není vždy regulární. Proto jsou dluhopisy těsně před splatností z konstrukce křivek vyřazovány (např. BIS 2005), kdy minimální hranice je až 1 rok.

[13] Přítomnost opcí – např. právo *emitenta* na předčasné splacení, nebo právo *investora* na předčasné splacení, příp. různá práva na výměnu za jiný instrument – má vliv na cenu dluhopisu. Pro korektní ocenění dluhopisu samotného by tak bylo třeba odečítat ceny těchto opcí, což není vždy jednoduché a přesné.

[14] Uvedená charakterizace předpokládá, že periodicita kupónových sazeb či kupónová sazba se nemění dnes známým způsobem během životnosti dluhopisu. Vymezení by šlo ovšem modifikovat, i pokud by toto neplatilo; nicméně se jedná o velmi řídké případy, které nejsou relevantní pro ČR. Máme-li k dispozici údaje o tržních cenách v % nominále, jak se běžně uvádějí, je užitečné počítat s fiktivním nominále 100 peněžních jednotek.

5. Následně se postupuje od krátkodobějších dluhopisů k dlouhodobějším. Obecně se forwardová sazba f_k pro horizont mezi splatností $k-1$-tého (tj. T_{k-1}) a k-tého dluhopisu (tj. T_k) vypočte z rovnice [3].

$$P_k = \frac{N_k}{\left(1+S(T_{k-1})\right)^{T_{k-1}} \cdot \left(1+f_k\right)^{T_k - T_{k-1}}} + \\ + \sum_{i=1}^{d_k} \frac{\frac{c_k}{\tau_k} \cdot N_k}{\left(1+S(T_{k-1})\right)^{T_{k-1}} \cdot \left(1+f_k\right)^{T_k - T_{k-1} - \frac{i-1}{\tau_k}}}, \\ + \sum_{i=1}^{e_k} \frac{\frac{c_k}{\tau_k} \cdot N_k}{\left(1+S(T_k - \frac{d_k - 1 - i}{\tau_k})\right)^{T_k - \frac{d_k - 1 - i}{\tau_k}}} \qquad [3]$$

kde e_k je počet zbývajících kupónových plateb, které nastávají dříve, než za T_{k-1} let, tedy je možné jejich současnou hodnotu spočítat s využitím již vypočtených spotových sazeb. d_k je počet zbývajících kupónových plateb, které nastávají až po okamžiku T_{k-1}, tudíž jejich současná hodnota je neznámá. Počet e_k lze získat zaokrouhlením dolů výrazu T_{k-1}/τ_k, a hodnotu d_k zaokrouhlením dolů výrazu T_k/τ_k a odečtením čísla e_k.

6. Spotová sazba vyjádřená jako funkce splatnosti $S(t)$ se na tomto úseku vypočte jako

$$S(t) = \left(\left(1+S(T_{k-1})\right)^{T_{k-1}} \cdot \left(1+f_k\right)^{t-T_{k-1}}\right)^{1/t} - 1, \quad \text{pro} \quad T_{k-1} < t \le T_k \qquad [4]$$

7. Kroky 5. a 6. se opakují pro každý dluhopis, až dokud $k = n$.

8. Spotová sazba vyjádřená jako funkce splatnosti $S(t)$ se pro splatnostní úsek přesahující splatnost nejdlouhodobějšího dluhopis vypočte s užitím poslední spočtené forwardové sazby f_n. Předpokládá se tedy, že tato forwardová sazba platí až do nekonečna.

$$S(t) = \left(\left(1+S(T_n)\right)^{T_n} \cdot \left(1+f_n\right)^{t-T_n}\right)^{1/t} - 1, \quad \text{pro} \quad T_n < t \qquad [5]$$

Výsledkem výpočtu je spotová křivka $S(t)$, která je definována pro každou splatnost t a na rozdíl od forwardových sazeb je spojitá. Tato spotová křivka může být užita pro diskontování peněžních toků z oceňovaného aktiva bezrizikovou mírou. Případně lze tuto spotovou křivku převést na jednoleté forwardové sazby odstupňované po celých letech, které jsou z této křivky odvozeny, tj.

$$F(t) = \begin{cases} S(1) & t = 1 \\ \dfrac{\left(1+S(t)\right)^t}{\left(1+S(t-1)\right)^{t-1}} - 1 & t = 2,3,\ldots \end{cases} \qquad [6]$$

Výhoda ročních forwardových sazeb oproti forwardovým sazbám užitým při konstrukci spotové křivky (f) spočívá v jejich určité vyhlazenosti na splatnostním segmentu křivky, ve kterém je k dispozici více obchodovaných dluhopisů. Pokud totiž v ročním úseku dochází splatnosti více dluhopisů, dojde ke zprůměrování několika kratších forwardových sazeb.[15]

4 Numerický příklad pro Českou republiku

Obecná prezentace metody v předchozí kapitole může snižovat přehlednost. Proto metodu demonstrujeme na skutečném příkladu českých státních dluhopisů. Kromě ilustrace postupu ukážeme nespojitost forwardové sazby. K otázce míry nespojitosti forwardových sazeb se krátce vyjádříme v kapitole 5.

Využijeme data zveřejněná MtS Czech Republic pro středu 12. 8. 2015.[16] Výhodou zdroje je, že (1) jde o skutečně obchodovatelné kótace k 11.00 hodin příslušného dne, že (2) přes obchodní platformu MtS probíhá značná část obchodů na trhu a rovněž (3) bezplatná veřejná přístupnost databáze. Z 22 dostupných dluhopisů je vyřazeno 5 dluhopisů s proměnlivým výnosem.[17] Důležité údaje pro zbývajících 17 dluhopisů ($n=17$) jsou ukázány v Tab. 1. Všechny tyto dluhopisy mají roční frekvenci výplaty kupónů ($\tau_1=\tau_2=\ldots=\tau_{17}=1$). Všechny mají rovněž identické nominále výši 10 000 CZK. Pro jednoduchost ale budeme předpokládat, že nominále je 100 CZK, aby kótace, které jsou standardně udávány v procentech jmenovité hodnoty (sloupce 5-7 Tab. 1), představovaly přímo cenu dluhopisu.

Tab. 1: Dluhopisová data pro 12. srpen 2015

k	ISIN	Popis	Zbyt-ková splat-nost (roky, T_k)	Kótace bid	Kótace ask	Kótace střed	Kupóno vá sazba (%, c_k)	Naběhlý úrok při N = 100 (AI_k)	Cena dluho-pisu při N = 100 (P_k)
1	CZ0001000749	CZGB 6.95 26/01/16	0,46	103,10	103,43	103,27	6,95	3,78	107,05
2	CZ0001003842	CZGB 0.500 28/07/16	0,96	100,54	100,67	100,60	0,50	0,02	100,62
3	CZ0001001903	CZGB 4.000 11/04/17	1,66	106,83	107,02	106,93	4,00	1,34	108,27
4	CZ0001004246	CZGB 0.850 17/03/18	2,60	102,04	102,23	102,14	0,85	0,34	102,48
5	CZ0001000822	CZGB 4.60 18/08/18	3,02	113,59	113,75	113,67	4,60	4,52	118,19
6	CZ0001002471	CZGB 5.000 11/04/19	3,66	117,69	117,92	117,81	5,00	1,68	119,49

[15] Navíc roční frekvence dokáže mírně rozrušit neměnnou výši forwardové sazby v intervalu mezi splatnostmi, protože části intervalu budou spadat do odlišných let.

[16] https://www.mtsdata.com/content/data/public/cze/fixing/index.php

[17] Někteří autoři doporučují automaticky vyřadit dluhopisy na krátkém konci výnosové křivky, jejichž tržní ceny (a výnosy) jsou zkresleny blížící se splatností. Bývají vyřazovány dluhopisy se zbytkovou splatností kratší než měsíc, 3 měsíce, nebo i 1 rok (BIS, 2005). Protože se článek zabývá středně a dlouhodobými výnosy a metoda Fama-Bliss eliminuje chyby v ocenění v období po splatnosti prvního korektně oceněného dluhopisu, toto vyřazování zde neprovádíme.

7	CZ0001003834	CZGB 1.500 29/10/19	4,21	105,63	105,88	105,76	1,50	1,18	106,93
8	CZ0001001317	CZGB 3.75 12/09/20	5,08	117,84	118,15	118,00	3,75	3,44	121,43
9	CZ0001002851	CZGB 3.850 29/09/21	6,13	121,46	121,83	121,65	3,85	3,35	124,99
10	CZ0001001945	CZGB 4.700 12/09/22	7,08	129,25	129,67	129,46	4,70	4,31	133,77
11	CZ0001002547	CZGB 5.700 25/05/24	8,79	142,99	143,60	143,30	5,70	1,22	144,52
12	CZ0001004253	CZGB 2.400 17/09/25	10,10	114,89	115,49	115,19	2,40	2,17	117,36
13	CZ0001004469	CZGB 1.000 26/06/26	10,87	100,52	101,17	100,85	1,00	0,13	100,97
14	CZ0001003859	CZGB 2.500 25/08/28	13,04	114,62	115,26	114,94	2,50	2,41	117,35
15	CZ0001004477	CZGB 0.950 15/05/30	14,76	93,57	94,43	94,00	0,95	0,23	94,23
16	CZ0001001796	CZGB 4.20 04/12/36	21,31	141,16	142,55	141,85	4,20	2,89	144,75
17	CZ0001002059	CZGB 4.850 26/11/57	42,29	159,10	164,00	161,55	4,85	3,45	165,00

Zdroj: MtS Czech Republic, výpočty autora.

Uváděné kótace představují tzv. čistou cenu. Abychom získali skutečnou (neboli „hrubou“) cenu v transakci s dluhopisem, musíme k čisté ceně přičíst naběhlý úrok (neboli alikvótní úrokový výnos). Dekompozice této ceny na čistou cenu a naběhlý úrok zajistí, že čistá cena je (téměř) imunní vůči změně hodnoty dluhopisu v čase[18], tj. že se vyvíjí pouze se změnou úrokových sazeb. Skutečná cena se v našem případě dluhopisů s roční výplatou kupónu vypočte jako[19]

$$P_k = Q_k \cdot N_k + AI_k = Q_k \cdot N_k + c_k \cdot N_k \cdot \left(T_k - \lfloor T_k \rfloor\right), \qquad [7]$$

kde Q_k je kótace ceny dluhopisu (v % jmenovité hodnoty) a AI_k jeho naběhlý úrok spočtený jako velikost kupónu vynásobená částí úrokového období (zde jeden rok), která již uběhla od poslední výplaty kupónu. $\lfloor \cdot \rfloor$ značí zaokrouhlení hodnoty na nejbližší celé číslo směrem dolů.

Vycházíme-li ze středu cenových kótací, tj. sloupce 7 Tab. 1, které jsou průměrem kótace bid a kótace ask, skutečná cena nejkratšího dluhopisu $(k=1)$ je

$$P_1 = 103{,}27 + 6{,}95 \cdot (1 - 0{,}46) = 103{,}27 + 3{,}753 = 107{,}023, \qquad [8]$$

pro druhý nejkratší dluhopis $(k=2)$

$$P_2 = 100{,}60 + 0{,}50 \cdot (1 - 0{,}96) = 100{,}60 + 0{,}02 = 100{,}62, \qquad [9]$$

[18] Každým dnem klesá doba do obdržení peněžních toků, a tedy roste cena dluhopisu. Po obdržení kupónu (lépe řečeno po rozhodném dni pro nárok na kupón) cena dluhopisu poklesne o hodnotu kupónu. Tyto efekty zachycuje právě komponenta skutečné ceny zvaná naběhlý úrok.

[19] V rovnici [7] a numerickém příkladu je pro jednoduchost abstrahováno od možností, že (1) se okamžik výplaty kupónu neshoduje s rozhodným dnem pro nárok na kupón a (2) že vypořádání transakcí s dluhopisy není okamžité.

atd. Hodnoty z výpočtů [8] a [9] nemusí plně odpovídat hodnotám v posledních dvou sloupcích Tab. 1 kvůli zaokrouhlování.

Nyní jsou připraveny všechny údaje pro konstrukci výnosové křivky metodou Fama-Bliss (krok 1 postupu). Dluhopisy jsou již seřazeny vzestupně podle splatnosti (krok 2 postupu). Nyní použijeme první dluhopis $(k=1)$. Forwardová sazba, aplikovaná na všechny jeho peněžní toky, která zajistí, že současná hodnota dluhopisu se rovná jeho skutečné tržní ceně, se vypočte jako:

$$\frac{100}{(1+f_1)^{0,46}}+\frac{0,0695\cdot 100}{(1+f_1)^{0,46}}=107,05. \qquad [10]$$

To vede k hodnotě forwardové sazby $f_1=-0,203\,\%$ (krok 3 postupu) na splatnostním intervalu od 0 do $T_1=0,46$ roku. Tato forwardová sazba umožní sestrojit první úsek spotové křivky (krok 4 postupu), a sice ve stejné výši, tj.

$$S(t)=-0,203\%, \qquad \text{pro} \qquad t\le 0,46. \qquad [11]$$

Nyní přejdeme k druhému nejkratšímu dluhopisu ($k=3$). Tento dluhopis má již pouze jednu zbývající výplatu peněžního toku – v okamžiku své splatnosti. Pro tento okamžik nemáme k dispozici příslušnou hodnotu spotové sazby k jeho diskontování (protože $T_1=0,46<T_2=0,96$). Hodnota forwardové sazby, platné od okamžiku $T_1=0,46$ až do okamžiku $T_2=0,96$, která zajistí, že současná hodnota dluhopisu se rovná jeho skutečné tržní ceně, se vypočte jako:

$$\begin{aligned}&\frac{100}{(1+S(0,46))^{0,46}\cdot(1+f_2)^{0,96-0,46}}+\frac{0,005\cdot 100}{(1+S(0,46))^{0,46}\cdot(1+f_2)^{0,96-0,46}}=\\&\frac{100}{(1-0,00203)^{0,46}\cdot(1+f_2)^{0,96-0,46}}+\frac{0,005\cdot 100}{(1-0,00203)^{0,46}\cdot(1+f_2)^{0,96-0,46}}=100,62\end{aligned} \qquad [12]$$

To vede k hodnotě $f_2=-0,052\,\%$. Informace bude využita k prodloužení spotové křivky pro splatnosti $T_1=0,46$ až $T_2=0,96$ pomocí vzorce

$$S(t)=\left((1-0,00203)^{0,46}\cdot(1-0,00052)^{t-0,46}\right)^{1/t}-1, \quad \text{pro} \quad 0,46<t\le 0,96 \; [13]$$

Například $S(0,96)=-0,124\,\%$. Lze si všimnout, že tento úsek spotové křivky již není konstantní. Protože pro $t=0,46$ vede rovnice [13] k $S(t)=-0,203\ \%$, je spotová křivka spojitá. Jinými slovy, plynule navazuje na svůj předchozí segment.

Ještě ukážeme výpočet pro třetí nejkratší dluhopis ($k=3$). Tento dluhopis má dvě zbývající výplaty peněžního toku – kupón za 0,34 roku a kupón a jmenovitou hodnotu v okamžiku splatnosti za 1,34 roku. První platbu dokážeme ocenit s pomocí již známého úseku spotové křivky. Druhou ovšem nikoli. Neznámou je zde forwardová sazba platná od okamžiku od okamžiku $T_2=0,96$ až do okamžiku $T_3=1,34$, která zajistí, že současná hodnota dluhopisu se rovná jeho skutečné tržní ceně.

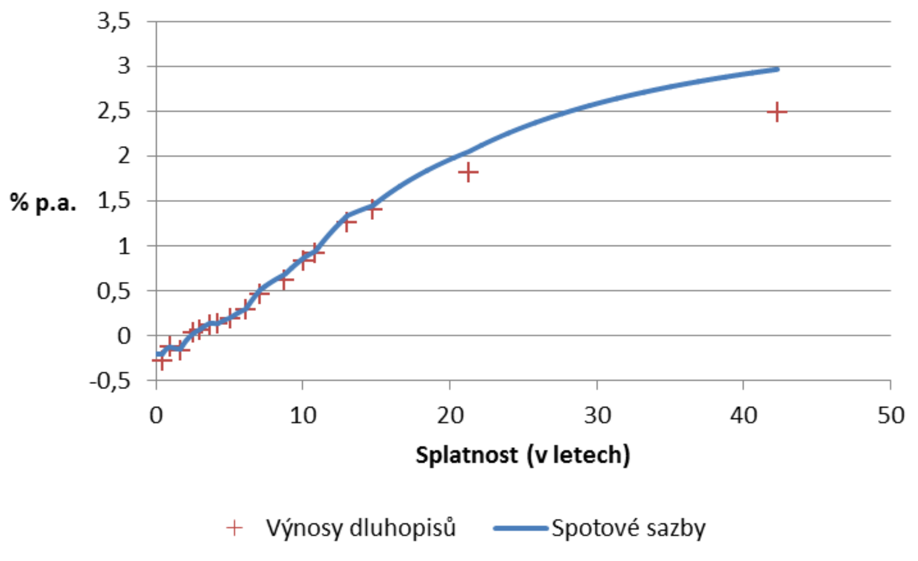
$$\frac{100}{\left(1+S(0{,}96)\right)^{0{,}96}\cdot\left(1+f_3\right)^{1{,}34-0{,}96}}+\frac{0{,}04\cdot 100}{\left(1+S(0{,}96)\right)^{0{,}96}\cdot\left(1+f_3\right)^{1{,}34-0{,}96}}+$$
$$+\frac{0{,}04\cdot 100}{\left(1+S(0{,}34)\right)^{0{,}34}}=\frac{100}{\left(1-0{,}00124\right)^{0{,}96}\cdot\left(1+f_3\right)^{1{,}34-0{,}96}}+ \qquad [14]$$
$$+\frac{0{,}04\cdot 100}{\left(1-0{,}00124\right)^{0{,}96}\cdot\left(1+f_3\right)^{1{,}34-0{,}96}}+\frac{0{,}04\cdot 100}{\left(1-0{,}00203\right)^{0{,}34}}=108{,}27$$

Řešením oceňovací rovnice je $f_3 = -0{,}361\,\%$. To umožní prodloužit spotovou křivku na úseku $T_2 = 0{,}96$ až $T_3 = 1{,}34$ pomocí vztahu.

$$S(t)=\left(\left(1-0{,}00124\right)^{0{,}96}\cdot\left(1-0{,}00361\right)^{t-0{,}96}\right)^{1/t}-1, \quad \text{pro } 0{,}96<t\le 1{,}34 \qquad [15]$$

Pro ostatní dluhopisy by se postupovalo obdobně. Výsledná spotová křivka je znázorněna na Obr. 1. Tvar spotové křivky věrně kopíruje výnosy do doby splatnosti použitých dluhopisů, byť zejména pro delší splatnosti se úrovně křivek rozcházejí. Tento rozdíl je známý (např. Livingston – Jain 1982) a podtrhuje důležitost užívání spotových sazeb namísto výnosů do doby splatnosti dluhopisů k diskontování peněžních toků (Mařík et al. 2011). Na Obr. 2 je znázorněna forwardová křivka, která byla k výstavbě spotové křivky použita. Za pozornost stojí, že sestává ze série vodorovných úseků, které na sebe nespojitě navazují. Body nespojitosti jsou splatnosti příslušných dluhopisů: všimněte si, jak body nespojitosti časově korespondují s vodorovným umístěním křížků.

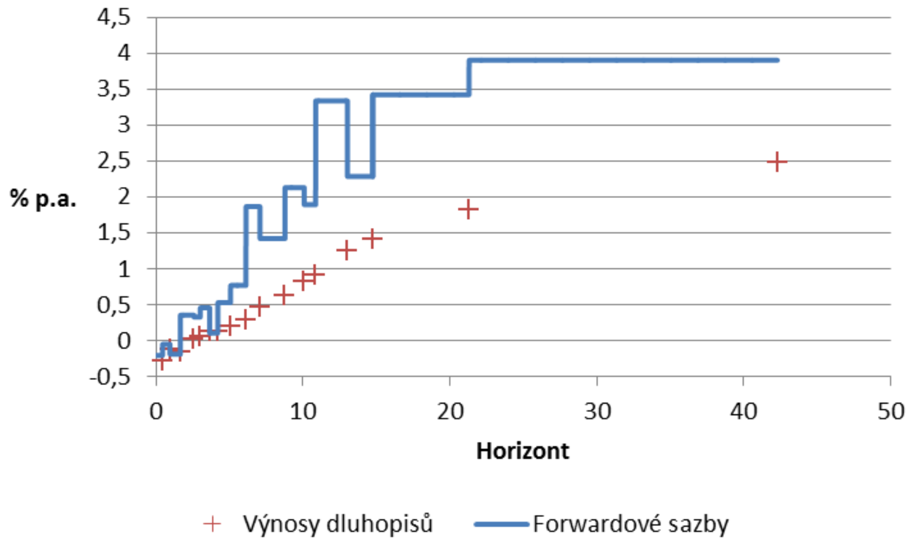
Obr. 1: Spotová křivka a výnosy užitých dluhopisů



Poznámka: Výnosy dluhopisů představují výnos do doby splatnosti státních dluhopisů s příslušnou splatností použitých při konstrukci spotové křivky, jak je uveden v databázi MtS Czech Republic.

Zdroj: MtS Czech Republic, výpočty autor.

Obr. 2: Forwardová křivka, ze které byla spotová křivka odvozena



Poznámka: Forwardová křivka představuje anualizovanou sazbu platnou na horizontu uvedeném na vodorovné ose se splatností jeden den. Například, hodnota pro desátý rok je jednodenní (resp. okamžitá) sazba, která bude v platnosti za deset let od okamžiku konstrukce křivky (tj. 12. 8. 2015). Výnosy dluhopisů představují výnos do doby splatnosti státních dluhopisů s příslušnou splatností použitých při konstrukci spotové křivky, jak je uveden v databázi MtS Czech Republic.

Zdroj: MtS Czech Republic, výpočty autor.

5 Charakterizace metody Fama-Bliss ve srovnání s alternativami

V přechozí kapitole byl zevrubně popsán výpočetní postup metody Fama-Bliss. Se znalostí výpočetního postupu přistupme k popisu jejích charakteristických vlastností.

1. **Užitý předpoklad o chování forwardové křivky je nejjednodušší možný**. Pokud bychom přemýšleli, jaký předpoklad použít, neexistuje jednodušší, neutrálnější a univerzálnější předpoklad, než je právě konstantnost forwardových sazeb. Tím je tento předpoklad přitažlivý. Analogický postup byl volen v článku Dvořák (2014) pro konstrukci spotové výnosové křivky z úrokových swapů pro splatnosti, jejichž kótace není na trhu k dispozici.[20] Jak již bylo zmíněno, je rovněž volen v řadě dalších prací z oblasti finanční ekonomie.

2. **Užitý postup je jednoznačný**. Postup představený v kapitole 2 je jednoznačný, co se týče jednotlivých kroků. Pokud jej budou aplikovat různí analytici, mající k dispozici stejná data, dospějí k totožným výsledkům. V tom se metoda liší od metod NSS, kde se nabízí volba optimalizačního kritéria (součet cenových versus součet výnosových odchylek; Svensson 1994, Hladíková – Radová 2012), způsobu optimalizace (metoda nejmenších čtverců; metoda maximální věrohodnosti; Schich 1997); a dále mechanismus numerické optimalizace a volba výchozího bodu po optimalizaci (různé hodnoty dávají různé výsledky; Slavík, 2001). Dále je otázkou, zda volit specifikaci Nelson-Siegel nebo Svensson, případně

[20] Pravidelně aktualizované bezrizikové výnosové míry získané z úrokových swapů konstruované tímto přístupem jsou volně ke stažení na http://iom.vse.cz/odborna-cinnost/bezrizikova-vynosnost-z-urokovych-swapu/

specifikaci s ještě vyšším počtem parametrů. Nastává rovněž otázka, zda předem omezit některé parametry odhadovaných funkcí, aby metoda dospěla vždy k ekonomicky rozumným výsledkům[21]. BIS (2005) přináší názorný přehled diverzity nastavení modelů, které pro konstrukci výnosových křivek využívají hlavní centrální banky. Pokud místo NSS volíme další z oblíbených metod – vyrovnávací spliny (Fisher et al. 1995 nebo Waggoner 1997) – je otázkou stupeň splinu (tj. derivace kterého řádu ještě mají být spojité, byť zde víceméně panuje empirický konsenzus na kubických splinech; BIS 2005) a otázka parametru míry vyrovnání (volba mezi vyšší hladkostí výsledné funkce a kvalitou proložení), případně způsob jeho diferenciace podle segmentu výnosové křivky (Waggoner 1997). Afinní modely (Vasicek 1977 nebo Ho – Lee 1986) zase vyžadují specifikaci procesu, podle kterého se budou v budoucnu vyvíjet krátkodobé sazby.

Je tedy patrné, že všechny ostatní metody kromě Fama-Bliss jsou svou specifikací ne zcela jednoznačné. Samozřejmě lze u těchto metod lze vyvinout technický standard, který poskytne jednoznačný návod na volbu příslušných parametrů. Takový návod ovšem bude do značné míry arbitrární, a tedy umělý. U metody Fama-Bliss tento problém zcela odpadá. Je jasné, že Famou a Blissem předpokládaný skokový průběh forwardové funkce (viz Obr. 2) není realistický. Otázka, **jak** by tento průběh měl vypadat, je ovšem nevyhnutelně subjektivní a různí analytici by dospěli k různým názorům. Má-li být ocenění jednoznačné (objektivizované), je Fama-Bliss velmi užitečnou metodou,[22] která může sloužit jako jakýsi benchmark pro volbu výnosové křivky.

3. **Metoda oceňuje na trhu obchodované dluhopisy konzistentně**. U všech použitých dluhopisů platí, že jejich současná hodnota vypočtená diskontováním výsledné spotové křivky je rovna jejich tržní ceně. Dluhopisy jsou tedy oceněny naprosto tržně, což je koncepčně vynikající pro tržní ocenění. Tato vlastnost není zdaleka samozřejmá. Například oblíbené metody NSS či vyrovnávací spliny toto nezaručují. Ty totiž při konstrukci křivky minimalizují chybu proložení, zároveň však kladou jistý důraz na hladkost prokládací křivky, tudíž proložení není nikdy dokonalé. Důvodem je původní účel přístupů extrahovat zejména základní informace o tvaru křivky (např. úroveň, sklon a zakřivení), protože z nich lze vyčíst tržní očekávání pro měnověpolitické účely (Svensson 1994). Ačkoli Dvořák (2014a) ukázal, že Svenssonova funkce prokládá pro Českou republiku typické tvary výnosové křivky velmi dobře, metoda, která neprokládá data dokonale, je však obhajitelná pouze tehdy, nejsou-li vstupní data dobrá, protože toto proložení umožní nekvalitu dat částečně napravit. Je však velkou (a značně subjektivní) otázkou, zda optimálním způsobem této korekce je pouze mechanicky „přefiltrovat“ tržní data Svenssonovým (nebo jakýmkoliv dalším) tvarem funkce. NSS nebo postup vyrovnávacích splinů je pro dobrý výsledek vhodné komplementovat údaji o likviditě segmentu trhu, vývoji cen a podivnostem v chování výnosové křivky a kontrolou oproti datům z minulých období. Inspirací zde může být CSRP dataset[23]. Vývoj takové metody pro český trh nespadá do náplně tohoto článku, a je vhodným tématem na finanční výzkum. Z této krátké exkurze je však patrné, že mechanické proložení předdefinovanou křivkou není optimální. Zajímavou alternativou zde může být vyšší třída afinních modelů, která dokáže ocenit na trhu obchodované dluhopisy konzistentně (např. Ho – Lee 1986).

---

[21] Ekonomicky nerozumným výsledkem může být například záporná nebo velmi vysoká hodnota dlouhodobé výnosové míry vzniklá proto, že na trhu neexistuje takto dlouhodobý dluhopis, který by dokázal dlouhodobou sazbu stabilizovat na přiměřené úrovni. Zde existují různé přístupy. Německá centrální banka omezuje hodnoty některých parametrů (Schich 1997), zatímco Hladíková – Radová (2012) pro český trh hodnoty parametrů nijak neomezuje.

[22] Je třeba zmínit, že existují přístupy, které výnosové křivky získané metodou Fama-Bliss dále upravují (tzv. smoothed Fama-Bliss). Tyto úpravy mají za cíl zvýšit datovou kvalitu a realističnost výsledného tvaru křivky.

[23] http://www.crsp.com/products/documentation/fama-bliss-discount-bonds-%E2%80%93-monthly-only.

4. **Metoda je výpočetně jednoduchá**. Metodu lze ve srovnání s metodami NSS, splinů a afinních modelů poměrně jednoduše implementovat. Implementaci navíc pomůže fakt, že výpočetní vzorce [1] a [3] je možné zjednodušit pomocí předpisu pro součet konečné geometrické řady. Protože se jedná o polynomy vyšších stupňů, analytické řešení nemusí existovat a je třeba se spoléhat na numerické řešení, stejně jako např. u výpočtu výnosu do splatnosti. Vzhledem k vyspělosti současné výpočetní techniky však toto není překážkou. Oproti tomu implementace metod NSS, splinů či afinních modelů vyžaduje dedikovaný software s příslušnými programovými balíčky nebo znalost postupů numerické optimalizace.

5. **Metoda není robustní vůči chybám v cenách dluhopisů**. Jak již bylo zmíněno v bodě 3, metoda zajistí, aby se současné hodnoty dluhopisů rovnaly jejich tržním cenám. Pokud je údaj o tržní ceně špatný (ve smyslu neodůvodněně nízký či vysoký), projeví se tento charakter v neúměrně vysoké či naopak nízké forwardové sazbě pro segment blízký jeho splatnosti (vizte opět Obr. 2). Kolísání segmentů forwardové křivky, odvozených metodou Fama-Bliss tak může sloužit k **orientačnímu měření kvality vstupních dat**. Čím více forwardové sazby kolísají, tím horší data pravděpodobně máme k dispozici.

Do spotové křivky se pak nedokonalost vstupních dat (a tedy „kostrbatost forwardové křivky) plně přenáší, a odezní až pro segment po splatnosti následujícího dluhopisu. Zvláště nepříznivý efekt by nastal, pokud by byla zkreslena cena nejdlouhodobějšího dluhopisu. Protože spotová sazba by v nekonečném horizontu konvergovala k forwardové sazbě, která byla s pomocí tohoto dluhopisu odvozena, mohlo by se stát, že by dlouhodobá spotová sazba nabývala neúměrně nízkých (i záporných) či neúměrně vysokých hodnot. Z toho plyne, že pokud máme obavy o kvalitu dlouhodobých dat, není vhodné používat metody Fama-Bliss na segmentu přesahujícím splatnost posledního dluhopisu. To je však pravdou i pro metodu NSS, kde dlouhodobá spotová sazba byla ukázána jako nezřídka ekonomicky nesmyslnou (Dvořák 2014a). Podobným problémem ostatně trpí i spliny.

Existence nereálně oceněných dluhopisů je potenciálně závažným problémem. Zvláště proto, že je v řadě případů obtížné špatně oceněné[24] dluhopisy vůbec detekovat a z konstrukce křivky vyřadit (nebo jejich výnos korigovat). Velmi často jediným indikátorem nekvality dat je tak vysoké kolísání forwardových sazeb. Protože nevíme, které z dluhopisů jsou oceněné špatně, bývají voleny různé přístupy, které výslednou křivku automaticky vyhlazují. Největší význam toto vyhlazení má, pokud existuje více dluhopisů podobné splatnosti, u kterých i malé rozdíly ve výnosech způsobí neúměrně velké kolísání forwardových sazeb při metodě Fama-Bliss. Český trh s poměrně malým počtem obchodovaných emisí je v tomto ohledu pro metodu Fama-Bliss příznivější než americký, britský či německý.

Srovnání metody Fama-Bliss s dalšími hlavními metodami konstrukce výnosové křivky v uvedených dimenzích je názorně shrnuto v Tab. 2.

Tab. 2: Výhody a nevýhody hlavních metod konstrukce výnosové křivky

Metoda	**Konzistence ocenění**	**Zásahy uživatele do konstrukce křivky**	**Vyhlazení nepřesností**	**Implementační náročnost**
Fama-Bliss (1987)	**Ano**	**Žádné**	**Žádné**	**Snadná**

[24] Malý objem obchodů (je-li tento údaj k dispozici) s dluhopisem může signalizovat riziko, že jeho kótovaná tržní cena nemusí být realistická, ale sám o sobě není důkazem.

Nelson-Siegel (1987) a Svensson (1994)	Ne	Optimalizace cenové nebo výnosové odchylky, numerická metoda optimalizace, aplikace omezení na velikosti parametrů	Automatické vyhlazení regresí	Středně obtížná
Interpolační spliny	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů, předpoklad na některé parametry[25]	Žádné; chování mimo uzlové body ovšem zveličuje nepřesnosti	Středně obtížná
Regresní spliny (McCulloch 1971, 1975)	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů	Automatické vyhlazení regresí	Středně obtížná
Vyrovnávací spliny (Fisher et al 1995)	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů, parametr míry vyhlazení	Míru vyhlazení lze stanovit uživatelsky	Obtížná
VRP spliny (Waggoner 1997)	Ne	Řád splinu, počet a rozmístění uzlových bodů, funkční předpis pro parametr míry vyhlazení	Míru vyhlazení lze stanovit uživatelsky různě pro různé segmenty křivky	Obtížná
Vasicek (1977)	Ne	Charakterizace procesu pro vývoj krátkodobé sazby	Automatické vyhlazení přes hladký charakter procesu pro krátkodobou sazbu	Obtížná
Ho-Lee (1986)	**Ano**	Charakterizace procesu pro vývoj krátkodobé sazby	**Žádné**	Obtížná

Zdroj: Autor.

Poznámka: Hodnocení implementační náročnosti je založeno na úsudku autora a slouží především k porovnání implementační náročnosti přístupů mezi sebou.

6 Závěr

V německé a české oceňovací literatuře pro oceňování dlouhodobých aktiv se poslední dobou prosazuje model výnosové křivky Nelson-Siegel či Svensson. Modely ovšem nejsou prosty nesnází. Jsou výpočetně nesnadné, vyžadují více či méně arbitrárně stanovovat důležité parametry výpočtu a jimi získané spotové sazby nevedou k ocenění použitých dluhopisů na přesně úrovni pozorované tržní ceny. Poslední uvedená výtka může být v mnohých případech výhodou, protože povede ke korekci zkreslených tržních cen. Pokud je ovšem cílem analytika tuto korekci provést, měl by využít výrazně pokročilejší analytické nástroje užívající data o likviditě instrumentu nebo splatnostního segmentu výnosové křivky, tvaru křivky v daném okamžiku a jejím vývoji v čase. Spoléhání se na automatické vyhlazení metodou Nelson-

[25] Pro více informací vizte Pienaar – Choudhry (2002).

Siegel-Svensson není zdaleka dostatečné. Jiné přístupy, např. přístup vyrovnávacích splinů či afinních modelů, rovněž nejsou prosty problémů.

Určité východisko z těchto potíží nabízí metoda Fama-Bliss. Ta předpokládá, že forwardové sazby jsou mezi splatnostmi na trhu obchodovaných instrumentů konstantní. Metoda je výpočetně jednoduchá, jednoznačná a vede ke konzistentnímu ocenění dluhopisů. I když předpoklad po částech konstantní forwardové sazby není dokonalý z hlediska realističnosti, neutrálnost, univerzálnost a srozumitelnost předpokladu metodu předurčuje do role benchmarkové metody, se kterou se ostatní metody mohou porovnávat. Zvláště užitečná je proto v **tržním nebo objektivizovaném ocenění**.

Výše řečené ovšem nebrání vývoji dokonalejších modelů výnosových křivek, které dokáží lépe korigovat nedokonalosti v dluhopisových datech a povedou k realističtějšímu tvaru výnosové křivky. Jiné aplikace výnosových křivek, např. pro oceňování derivátů, extrakce tržních očekávání či prognózu vývoje úrokových měr pak vyžadují jiné přístupy, a metoda Fama-Bliss u nich není vhodná.

Literatura:

[1] Adrian, T. – Crump, R. K. – Moench, E. (2008). *Pricing the Term Structure with Linear Regressions*. Federal Reserve Bank of New York Staff Report No. 340. Revised April 2013.

[2] Bank on International Settlements (2005). *Zero-coupon yield curves: technical documentation*. BIS Papers No. 25.

[3] Bloomberg (2009). *Building the Bloomberg Interest Rate Curve – Definitions and Methodology*. September 2009.

[4] Damodaran, A. (2008). *What is the riskfree rate? A Search for the Basic Building Block*. Stern School of Business, New York University. [cit. 7.7.2013] Dostupné na: http://people.stern.nyu.edu/adamodar/pdfiles/papers/riskfreerate.pdf.

[5] Diebold, F. X. – Li, C. (2006). *Forecasting the term structure of government bond yields*. Journal of Econometrics 130, 337-364.

[6] Dvořák, M. (2014). *Užití swapových sazeb pro stanovení bezrizikové míry se zřetelem na Českou republiku*. Oceňování 7, 1, 3-26.

[7] Dvořák, M. (2014a). *Bezriziková míra ze státních dluhopisů: přednosti a úskalí Svenssonovy metody*. Oceňování 7, 3, 3-28.

[8] EOPA (2016). *Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures*. 30 May 2016. Frankfurt: EIOPA.

[9] Fama, E. F. – Bliss, R. R (1987). *The Information in Long-Maturity Forward Rates*. American Economic Review 77, 4, 680-692.

[10] Fisher, M. – Nychka, D. – Zervos, D. (1995). *Fitting the term structure of interest rates with smoothing splines*. Finance and Economics Discussion Series Working Paper No. 95-1, Federal Reserve Board.

[11] Gilli, M. – Grosse, S. – Schumann, E. (2010). *Calibrating the Nelson–Siegel–Svensson model*. Comisef Working Paper 031. [cit. 31.7.2014]. Dostupné z http://comisef.eu/files/wps031.pdf

[12] Hanzal, M. (2015). *Bezriziková úroková míra se zaměřením na Svenssonovu metodu*. Diplomová práce. Vysoká škola ekonomická v Praze, Fakulta financí a účetnictví.

[13] Ho, T. S. Y., Lee, S. B. (1986). Term structure movements and pricing interest rate contingent claims, Journal of Finance, 41, 5, 1011–1029.

[14] Hordahl, P. – Tristiani, O. – Vestin, D. (2004). *A joint econometric model of macroeconomic and term structure dynamics*. ECB Working Paper Series No. 405.

[15] Hladíková, H. – Radová, J. (2012). *Term Structure Modelling by Using Nelson-Siegel Model*. European Financial and Accounting Journal 7,2, 36-55.

[16] Jeffrey, A. – Linton, O. – Nguyen, T. (2006). *Flexible Term Structure Estimation: Which Method is Preferred?* Metrica, 63, 1, 99-122.

[17] Kim, D. H. – Orphanides, A. (2007). The bond market term premium: what is it, and how can we measure it? *BIS Quarterly Review*, June 2007.

[18] Kladívko, K. (2010). *The Czech Treasury Yield Curve from 1999 to the Present.* Czech Journal of Economics and Finance 60, 4, s. 307-335.

[19] Koopman, S. J., – Mallee, M. I. P. – Van der Wel, M. (2010). *Analyzing the Term Structure of Interest Rates Using the Dynamic Nelson–Siegel Model With Time-Varying Parameters*. Journal of Business & Economic Statistics 28, 3, 329-343.

[20] Livingston, M. – Jain, S. (1982). *Flattening of Bond Yield Curves for Long Maturities*. Journal of Finance 37, 1, 157-167.

[21] Ludvigson, S. C. – Ng, S. (2009). Macro factors in Bond Risk Premia. Review of Financial Studies 22, 12, 5027-5067.

[22] Maříková, P. – Mařík, M. (2012). *Odvozování bezrizikové výnosové míry z tržních dat pomocí Svenssonovy metody*. Odhadce a oceňování majetku 4/2012, s. 67-79.

[23] Mařík, M. et al. (2011). *Metody oceňování podniku pro pokročilé: Hlubší pohled na vybrané problémy*. 1. vydání. Praha: Ekopress.

[24] Mařík, M. et al. (2011a). *Metody oceňování podniku: Proces ocenění, základní metody a postupy*. 3. upravené a rozšířené vydání. Praha: Ekopress.

[25] Nelson, C. R. – Siegel, A. F. (1987). *Parsimonious Modeling of Yield Curves*. Journal of Business 60, 473-489.

[26] Pienaar, R. – Choudhry, M. (2002). *Fitting the Term Structure of Interest Rates Using the Cubic Spline Methodology*. In: Fabozzi, F. J. (ed). Interest Rate, Term Structure, and Valuation Modeling. Hoboken: John Wiley and Sons.

[27] Priebsch, M. A. (2013). *Computing Arbitrage-Free Yields in Multi-Factor Gaussian Shadow-Rate Term Structure Models*. Federal Reserve Board Finance and Economics Discussion Series No. 2013-63.

[28] Schich, S. T. (1997). *Estimating the German term structure*. Discussion paper 4/97. Frankfurt Am Main: Economic Research Group of the Deutsche Bundesbank.

[29] Slavík, M. (2001). *Odhad časové struktury úrokových sazeb z cen domácích dluhopisů*. Finance a úvěr, 51,11, 591-606.

[30] Svensson, L. E. O. (1994). *Estimating and interpreting forward interest rates: Sweden 1992-1994*. Seminar Paper No. 579. Stockholm: Institute for International Economic Studies, University of Stockholm.

[31] Vasicek, O. (1977). *An equilibrium characterization of the term structure*. Journal of Financial Economics, 5, 177–188.

[32] Waggoner, D. F. (1997). *Spline Methods for Extracting Interest Rate Curves from Coupon Bond Prices*. Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper No. 97-10.

Bezrizikové sazby ze státních dluhopisů: metoda Fama-Bliss

Michal Dvořák

ABSTRAKT

V německé a české oceňovací literatuře se poslední dobou prosazuje model výnosové křivky Nelson-Siegel-Svensson. Model je výpočetně nesnadný, vyžaduje více či méně arbitrárně stanovovat důležité parametry výpočtu a tímto modelem získané spotové sazby nevedou k ocenění použitých dluhopisů na úrovni pozorované tržní ceny. Určité východisko nabízí metoda Fama-Bliss. Ta předpokládá, že forwardové sazby jsou mezi splatnostmi na trhu obchodovaných dluhopisů konstantní. Metoda je výpočetně jednoduchá, jednoznačná a vede ke konzistentnímu ocenění obchodovaných dluhopisů. I když předpoklad po částech konstantní forwardové sazby není dokonalý z hlediska realističnosti, jednoduchost, univerzálnost a srozumitelnost předpokladu metodu předurčuje do role benchmarkové metody, se kterou se ostatní metody mohou porovnávat. Zvláště užitečná je proto v tržním nebo objektivizovaném ocenění.

Klíčová slova: Bezriziková míra, diskontní míra, bootstrapping, výnosová křivka, Fama-Bliss

Risk-free rates from government bonds: the Fama-Bliss method

ABSTRACT

In German and Czech valuation literature the Nelson-Siegel-Svensson models become popular. The models are difficult to estimate, require more or less arbitrary setup of important calculation parameters and the spot rates obtained through this class of models fail to match market valuation of the bonds used. Fama-Bliss method offers one possible solution to this issues. It assumes forward rates are constant between maturities of the bonds traded. The method is computationally simple, unequivocal and provides consistent valuation of the source bonds. Even though the piecewise constant forward rate assumption is not realistic, the ease, universality and comprehensibility of the methods predestine it to serve as a certain benchmark against which other methods can be compared. It is especially useful for market-based and objectivized valuation approaches.

Key words: Risk-free rate, discount rate, bootstrapping, yield curve, Fama-Bliss

JEL classification: G32, E43